

Determinare $k \in \mathbb{R}$ t.c. i vettori aperti siano linearmente indipendenti.

⑥

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \underline{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ k \\ k+1 \end{bmatrix}$$

Stadiamo rank della matrice $A = \begin{bmatrix} \underline{v}_1^T \\ \underline{v}_2^T \\ \underline{v}_3^T \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & k & k+1 \end{bmatrix}$$

1.) Esplorare

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \quad \text{è minore non nulla} \Rightarrow \text{rank}(A) \geq 2$$

Ottiamo aggiungendo R_3, C_3 :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & k \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = k+1-2 = k-1 = 0 \Leftrightarrow k=1$$

$\Rightarrow k \neq 1$ 3 minore 3 ordine non nulla
 $\Rightarrow \text{rank}(A) = 3$

$\Rightarrow k=1$ ottimo con R_3, C_4

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2+2-4 = 0$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A) = 2$$

$\Rightarrow \underline{v}_i$ sono lin. indep. $\Leftrightarrow k \neq 1$

2.) MEG.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & k & k+1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} R_1 \leftrightarrow -R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & k & k+1 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - R_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & k+1 & k+3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 - 2R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & k-1 & k-1 \end{bmatrix}$$

So matrix maximum $\Leftrightarrow \exists$ invert

$$\Leftrightarrow k-1 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{k \neq 1}$$

Dimostrare che l'insieme dei polinomi di $\mathbb{R}[x]$ a coeff. reali ed esponenti pari è sottospazio di $\mathbb{R}[x]$. (Esponenti dispari?)



Osserviamo che il polinomio nullo è un polinomio con esponenti pari $\Rightarrow 0 \in X$. È condizione necessaria, ma non sufficiente affinché X sia sottospazio. Verifichiamo la chiusura lineare

$$(\lambda X = X)$$

Siano $p(x)$ e $q(x) \in X$. Allora esistono $m, n \in \mathbb{N}$ $m \geq n$

per cui

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{2i}$$

$$q(x) = \sum_{i=0}^m b_i x^{2i}$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \alpha p(x) + \beta q(x) &= \sum_{i=0}^n \alpha a_i x^{2i} + \sum_{i=0}^m \beta b_i x^{2i} = \\ &= \sum_{i=0}^n (\alpha a_i + \beta b_i) x^{2i} + \sum_{i=n+1}^m \beta b_i x^{2i} \in X \end{aligned}$$

(è sempre polinomio con esponenti pari)

$\Rightarrow X$ è linearmente chiuso ($\lambda X = X$)

$\Rightarrow X \leq \mathbb{R}[x]$

N.B. Il polinomio nullo non è polinomio ad esponente dispari quindi l'analogo

insieme dei polinomi ad esp. dispari, non contenente il vettore nullo, non è sottospazio di $\mathbb{R}[x]$

261)
(Sottospazi)

S-C

(T.E. 31/1/96 Meccanica)
(*)

Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ e il suo
sottospazio: $W = \{(x, y, z) \mid x \geq 0\}$

Stabilire se W è sottospazio di $\mathbb{R}^3$

Sia $v = (x, y, z) \in W$ con $x \neq 0$.

Ponendo $\lambda = -1 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda v = (-x, -y, -z) \notin W$,
in quanto $-x < 0$

$\Rightarrow W$ non è chiuso rispetto al prodotto
per scalari

$\Rightarrow W$ non è sottospazio

262)

S-C

(Sottospazi)

(T.E. 9/1/96 MECCANICA (A))

Stabilisce se l'insieme $S = \{(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \mid 2a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$.

Se S fosse un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, $\underline{0} = (0,0,0,0)$ dovrebbe essere un elemento di S .

Ma $\underline{0} \notin S \Rightarrow S$ non è sottospazio di $\mathbb{R}^4$

Verificare che V è un sottospazio

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

è un sottospazio dello spazio vettoriale $M_2(\mathbb{R})$.

Basta verificare che V è linearmente chiuso

① $\forall x \in \mathbb{R} \text{ e } \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \in V$

$$x \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} xa & xb \\ xb & xa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{bmatrix} \in V, \text{ poiché}$$

$a' = xa \in \mathbb{R}$
 $b' = xb \in \mathbb{R}$

② $\forall \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{bmatrix} \in V \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a' & b' \\ b' & a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+a' & b+b' \\ b+b' & a+a' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{a} & \bar{b} \\ \bar{b} & \bar{a} \end{bmatrix} \in V$$

in questo $\bar{a} = a+a' \in \mathbb{R}$

$$\bar{b} = b+b' \in \mathbb{R}$$

5

Determinare per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il vettore

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$$

si può scrivere come combinazione lineare dei vettori

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underline{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$



Osservare statistiche al variare di $k \in \mathbb{R}$ quando esistono ~~esistono~~ $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ f.c.

$$x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ k \end{bmatrix}$$

$$A|b = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & k \end{array} \right]$$

1.) HEG

$$R_1 \leftrightarrow R_2 \quad \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ -2 & 5 & k \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow 3R_3 + 2R_1} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 19 & 3k+2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 19R_2}$$

$$R_3 \rightarrow R_3 + 19R_2$$

$$\begin{bmatrix} \textcircled{3} & 2 & 1 \\ 0 & \textcircled{-1} & -2 \\ 0 & 0 & 3k-36 \end{bmatrix}$$

Pivot: a_{11}, a_{22}, a_{33} are $\neq 0$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{rank}}}{\text{rank}}(A) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{rank}}}{\text{rank}}(A|b) = \begin{cases} 2 & 3k-36=0 \\ 3 & 3k-36 \neq 0 \end{cases}$$

$$3k-36=0 \Leftrightarrow k = \frac{36}{3} = 12$$

$k=12 \Rightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A|b) = 2$ $\nexists$! solutions

For $k \neq 12$ $\exists$ solution.

2) Laplace

$$\begin{vmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \\ -2 & 5 & k \end{vmatrix} = +1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & k \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 3k+2 - 2(15+4) =$$

$$= 3k+2-38 = 3k-36 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow k \neq 12$$

[...]