

② Ridurre a scala la seguente matrice e calcolarne il rango (MEG)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\xrightarrow{R_2 - 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & -1 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{2} \end{bmatrix}$$

Il pivot è il primo el. non nullo di ogni riga da sx a dx

In questo caso i pivot sono a_{11}, a_{22}, a_{34}

$$\Rightarrow \underline{\underline{\rho(A) = 3}}$$

⑥ Ridurre a scala la seguente matrice e calcolarne il rango (MEG)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ -3 & -4 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & -3 & -6 \\ 3 & 10 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\xrightarrow{R_2 + 3R_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 9 \\ 2 & 2 & 3 & -3 & -6 \\ 3 & 10 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 - 2R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -12 \\ 3 & 10 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\xrightarrow{R_4 - 3R_1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & -3 & -12 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix} =$$

$$\xrightarrow{R_3 + R_2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & -8 \end{bmatrix} =$$

$$R_3 \leftrightarrow R_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 4 & 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_3 - 2R_2 = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & \textcircled{2} & -1 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & -3 & -26 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \textcircled{-3} \end{bmatrix}$$

pivot row

$a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{4,5}$

$$\Rightarrow \underline{\rho(B) = 4}$$

(c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & -4 & 0 & 2 \\ 3 & -4 & 8 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & -4 & 1 \end{bmatrix} =$

$\xrightarrow{R_2 + 2R_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 3 & -4 & 8 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & -4 & 1 \end{bmatrix} =$

$\xrightarrow{R_3 - 3R_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 8 & -4 & 1 \end{bmatrix} =$

$\xrightarrow{R_4 - 2R_1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} =$

$\xrightarrow{R_3 + R_2} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} =$

$\xrightarrow{R_4 - 2R_3} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -2 \end{bmatrix} =$

Pivot:
 $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$
 $\rightarrow$

- Determinare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ il rango della matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & 3 & 1 \\ 3 & 8 & 5 & -1 & 1 \\ 3 & 9 & 9 & 1 & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 + R_1 \\ R_4 - 3R_1 \\ R_5 - 3R_1 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 8 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 12 & 4 & \alpha \end{bmatrix} =$$

$$\begin{array}{l} R_3 - R_2 \\ R_4 - 2R_2 \\ R_5 - 3R_2 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & \alpha \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_4 - R_3 \\ R_5 - 2R_3 \end{array} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 2 \end{bmatrix}$$

Pivot: $a_{11} = 1$
 $a_{22} = 1$
 $a_{34} = 2$

$a_{4,5} = \alpha - 2$

$$R_4 \leftrightarrow R_5 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha - 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \alpha \neq 2 \text{ 4 pivot} \Rightarrow \rho(A) = 4$

$\alpha = 2 \text{ 3 pivot} \Rightarrow \rho(A) = 3$

3x

① Risolvere il seguente sistema con HEG
comunemente corrisp. Rouché-Capelli.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_5 = 10 \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 + x_4 = 12 \end{cases}$$

$$A|b = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & -1 & 10 \\ 3 & 10 & 8 & 1 & 12 \end{array} \right] =$$

$\Rightarrow$ dire
cosa dice Rouché-Capelli
su esistenza e #
soluzioni.

Riduciamo a scala con HEG

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & -3 \end{array} \right] =$$

$$\begin{array}{l} R_3 + 2R_2 \\ R_4 + R_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & -8 \end{array} \right] =$$

$$R_4 - R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} ① & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & ① & 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & ② & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & ① & -3 \end{array} \right] =$$

HEG: non ci sono casi o/k
quindi è risolvibile
con $n-p$ soluzioni
e $p \neq$ pivot (= rango);

I pivot sono $a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}$

$$\rightarrow \rho(A) = 4$$

procedendo dal basso verso l'alto, risolviamo il sistema con la matrice inversa:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_2 + x_4 = -5 \\ 2x_3 + x_4 = -5 \\ x_4 = -3 \end{cases} \begin{cases} - \\ - \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = x_4 + 5 = -3 + 5 = 2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -3 \end{cases} \begin{cases} x_1 = -3x_2 - 2x_3 + 5 = -6 + 2 + 5 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = -1 \\ x_4 = -3 \end{cases}$$

Sol := (1, 2, -1, -3)

⑥ come per ④:

[CASA 2021]

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 10 \\ -x_1 + 6x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

$$A|b = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & -2 & 5 & 6 & 10 \\ -1 & 6 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right] =$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 + R_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 6 \end{array} \right] =$$

$$\begin{array}{l} R_3 + R_2 \\ R_4 - 3R_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 3 \end{array} \right] =$$

$$\xrightarrow{R_4 - 2R_3} = \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 0 & 2 & 1 & | & 3 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 & -1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{2} & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \textcircled{-1} \end{bmatrix}$$

MEG: ultima riga in forma $0 \cdot k$ con $k \neq 0$
 $\Rightarrow$ Sistema impossibile

Rank-Defect: $\rho(A) = \# \text{pivot} = \{a_{11}, a_{22}, a_{34}\} = 3$

$$\rho(A|b) = \# \text{pivot} = \{a_{11}, a_{22}, a_{34}, a_{45}\} = 4$$

$$\Rightarrow \rho(A) \neq \rho(A|b)$$

$\Rightarrow$ Sistema impossibile.

(4)

- Determinare le variabili di $\alpha \in \mathbb{R}$ le soluzioni del sistema sopra, dandone un'interpretazione geometrica.

$$\begin{cases} x - y + \alpha z = -1 \\ \alpha x + z = -2 \\ y + z = -1 \end{cases}$$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ \alpha & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right] =$$

$$\xrightarrow{R_2 - \alpha R_1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha & 2 - \alpha^2 & \alpha - 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

Per evitare denominatori con polinomio si scambiano ultime due righe

$$R_2 \leftrightarrow R_3 = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & \alpha & 2 - \alpha^2 & \alpha - 2 \end{array} \right] =$$

$$\xrightarrow{R_3 - \alpha R_2} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -\alpha^2 - \alpha + 2 & 2\alpha - 2 \end{array} \right]$$

I pivot sono $a_{11}=1$, $a_{22}=1$ e $a_{33} = -\alpha^2 - \alpha + 2 \neq 0$, altrimenti a_{34} .

$$-\alpha^2 - \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow (\alpha + 2)(\alpha - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -2$$

$$\alpha = 1$$

~~$\alpha \neq -2$~~

Caso $\alpha = 1$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

~~Il sistema ha infinite soluzioni~~

1 pivot sono 2 sia in A che $A|b$.

HEG: siamo nel caso di ∞ solut.

Rouché-Capelli: idem.

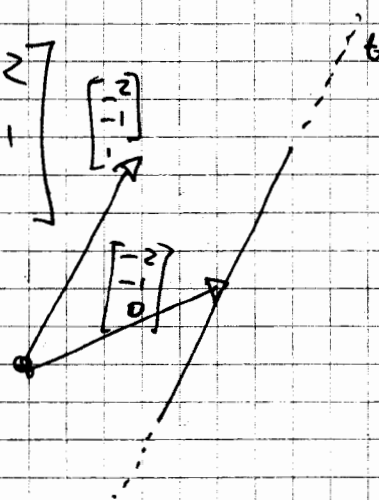
Il sistema ammette a

$$\begin{cases} x - y + z = -1 \\ y + z = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x + 1 + z + z = -1 \\ y = -1 - z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 - 2z \\ y = -1 - z \end{cases} \quad \text{Poniamo } z = t \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x = -2 - 2t \\ y = -1 - t \\ z = t \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

retta in forma parametrica.



Caso $\alpha = -2$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right]$$

Con calcolo dei pivot abbiamo $\rho(A|b) = 3 \neq 2 = \rho(A)$

$\Rightarrow$ Rouché-Capelli: $\nexists$ solut.

HEG: caso $0 < k \neq 0 \Rightarrow \nexists$ solut.

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & -1 & \alpha & -1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \alpha - \alpha + 2 & 2\alpha - 2 \\ & & \textcircled{2} & \\ & & \textcircled{3} & \end{array} \right]$$

Siamo nel caso $\rho(A) = 3 = \rho(A|b)$

$\Rightarrow \exists \infty^{h-p} = \infty^{3-3} = \infty^0$ soluzioni.

Il solut. Ricaviamole con pssg: il sistema è equivalente a:

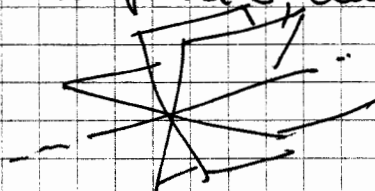
$$\begin{cases} x - y + \alpha z = -1 \\ y + z = -1 \\ -(\alpha + 2)(\alpha - 1)z = 2(\alpha - 1) \end{cases} \quad \begin{cases} x = -1 + \frac{z}{\alpha + 2} + \frac{2\alpha}{\alpha + 2} - 1 \\ y = -1 + \frac{z}{\alpha + 2} \\ z = -\frac{2}{\alpha + 2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{-\alpha - 2 + z + 2\alpha - \alpha - 2}{\alpha + 2} = -\frac{2}{\alpha + 2} \\ y = -1 + \frac{z}{\alpha + 2} \\ z = -\frac{2}{\alpha + 2} \end{cases}$$

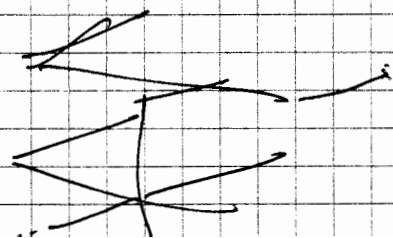
$$\begin{cases} x = -\frac{2}{\alpha + 2} \\ y = -\frac{\alpha}{\alpha + 2} \\ z = -\frac{2}{\alpha + 2} \end{cases}$$

Interpretazione geometrica:

Caso $\alpha = 1$ 3 piani in fascio, con retta comune

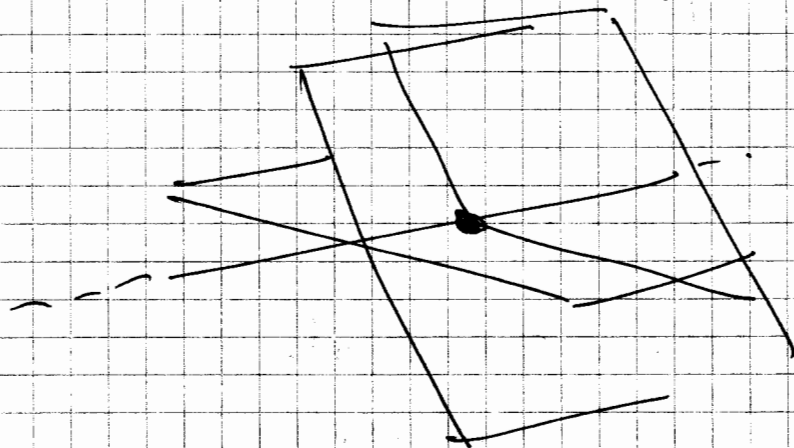


Caso $\alpha = -2$ 2 piani sono paralleli;



Caso $\alpha \neq -2 \wedge \alpha \neq 1$

piani che si intersecano in un punto:



(5)

Dimostrare che dati i sistemi lin. (caso 2021)

$$S_1: Ax = b_1$$

$$S_2: Ax = b_2$$

$$S_3: Ax = b_1 + b_2$$

$$\text{se } v_1 \in \text{Sol}(S_1) \text{ e } v_2 \in \text{Sol}(S_2) \Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{Sol}(S_3)$$

~~$Ax = b_1 + b_2$~~

La dim si basa sulla proprietà distributiva del prodotto di matrici rispetto alla somma:

$$A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2$$

Adesso

$$(i) \quad v_1 \in \text{Sol } S_1 \Rightarrow Av_1 = b_1$$

$$(ii) \quad v_2 \in \text{Sol } S_2 \Rightarrow Av_2 = b_2$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 \text{ t.c. } A(v_1 + v_2) = Av_1 + Av_2 = b_1 + b_2$$

$$\Rightarrow v_1 + v_2 \in \text{Sol}(S_3)$$

6
Dimostrare che una matrice di ~~$M_{2,m}(\mathbb{K})$~~ di rango ≤ 2 (caso 2021)

$\Rightarrow$ o la prima riga è nulla o la seconda è un multiplo scalare della prima.

Dim

Poniamo $A = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$ con A_i vettori di tipo $(1, m)$

Se $A_1 = 0$ abbiamo $\mathcal{R}(A) = 1$

Se $A_2 = 0$ allora $A_2 = 0 \cdot A_1 \Rightarrow$ abbiamo $\mathcal{R}(A) = 1$.

Unico caso di interesse è $A_i \neq 0 \forall i$, quindi $\rho(A) = 2$.

Siano a_{1i} e a_{2j} i primi elementi non nulli delle due righe.

Abbiamo che $i = j$. Se fosse $i < j \Rightarrow$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \textcircled{a_{1i}} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & \textcircled{a_{2j}} & \dots \end{bmatrix}$$

e avremmo 2 pivot, contro l'ipotesi che $\rho(A) = 1$.

Se $i > j$ basterà invertire le due righe e fare lo stesso ragionamento.

Ma allora, per la stessa ipotesi, dovendo esistere un unico pivot, necessariamente

$$\text{in } A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & a_{1i} & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{2j} & \dots \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A_2 - \frac{a_{2j}}{a_{1i}} A_1 = 0$$

$$\Rightarrow A_2 = \frac{a_{2j}}{a_{1i}} A_1$$

(altrimenti ci sarebbero
2 pivot: non esiste un
 a_{2k} con $k > i$ dopo l'operazione)

Determinare le soluzioni dei seguenti sistemi (9)

a)
$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ 2x + 5y - 3z = 0 \\ x + 4y - 8z = -18 \end{cases}$$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 5 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -8 & -18 \end{array} \right]$$

Calcoliamo rango con MEG

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -8 \\ 0 & 2 & -8 & -22 \end{array} \right] =$$

$$R_3 - 2R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & 0 & 4 \\ 0 & \textcircled{1} & -3 & -8 \\ 0 & 0 & \textcircled{-2} & -6 \end{array} \right]$$

1 pivot sono #3 in colonne tra A e A|b, ovvero entrambe le matrici hanno #3 righe non zero

$\Rightarrow \rho(A) = \rho(A|b) = 3 \Rightarrow \exists!$ soluzione

(Rouché-Capelli: $20^{3-3} = 20^0 = 1 > 0$.)

Calcoliamo per sostituzione retrograda

$$\begin{cases} x + 2y = 4 \\ y - 3z = -8 \\ -2z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - 2y = 4 - 2(-1) = 6 \\ y = -8 + 3z = -8 + 3(-3) = -17 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 6 \\ -17 \\ 3 \end{bmatrix}$$

b)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x + 8y - 2z = 2 \\ 2x - 2z = 8 \\ 3x + 4y - 8z = 18 \end{cases}$$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & 8 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 8 \\ 3 & 4 & -8 & 18 \end{array} \right] =$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 3R_1 \\ R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -5 & 12 \end{array} \right] = \begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2y + z = -4 \\ 2z = -4 \end{cases} \begin{cases} - \\ - \\ z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} R_3 + 2R_2 \\ R_4 + R_2 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 8 \end{array} \right] = \begin{cases} x = -2y + z + 2 = 2/2 + 2 = 2 \\ y = \frac{-z - 4}{2} = \frac{2 - 4}{2} = -1 \\ z = -2 \end{cases}$$

$$R_4 + 2R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} \textcircled{1} & 2 & -1 & 2 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 & -4 \\ 0 & 0 & \textcircled{2} & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

#3 pivot for A & $A|b \Rightarrow \rho(A) = \rho(A|b) = 3$
 $\Rightarrow \infty^{3-3} = \infty^0$ FI solutions

$$\textcircled{c} \begin{cases} 2x + y + 3z = -1 \\ 4x + 4y + 6z = 1 \\ 6x + 5y + 6z = -1 \\ 6x + y + 3z = -11 \end{cases}$$

$$A|b = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & 6 & 1 \\ 6 & 5 & 6 & -1 \\ 6 & 1 & 3 & -11 \end{array} \right]$$

$$\begin{array}{l} R_2 - 2R_1 \\ R_3 - 3R_1 \\ R_4 - 3R_1 \end{array} \rightarrow = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -8 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{array}{l} R_3 - R_2 \\ R_4 + R_2 \end{array} \rightarrow = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -5 \end{bmatrix} =$$

$$R_4 - 2R_3 \rightarrow = \begin{bmatrix} \textcircled{2} & 1 & 3 & -1 \\ 0 & \textcircled{2} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \textcircled{-3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{-3} \end{bmatrix}$$

#3 pivot per A, #4 pivot per A|b

$$\Rightarrow \rho(A) = 3 < 4 = \rho(A|b)$$

$\Rightarrow$ $\nexists$ soluzioni (MEG: caso $\underline{0} = k$)

- tra le parabole di eq.

$$y = ax^2 + bx + c$$

determinare quelle che passano per i punti

$$A(-1, 2)$$

$$B(0, 3)$$

$$C(1, 6)$$

[NB: è problema di 1° grado o di 2°?]
Risolubile con sistemi lineari

la parabola passano per i punti assegnati $\Rightarrow$ le loro coordinate soddisfanno l'eq della parabola:

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ c = 3 \\ a + b + c = 6 \end{cases}$$

$$A|b = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 1 & 1 & 1 & | & 6 \end{bmatrix} \approx$$

(MEG)

$$\xrightarrow{R_3 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \\ 0 & 2 & 0 & | & 4 \end{bmatrix} \approx$$

$$R_2 \leftrightarrow R_3 = \begin{bmatrix} ① & -1 & 1 & | & 2 \\ 0 & ② & 0 & | & 4 \\ 0 & 0 & ① & | & 3 \end{bmatrix}$$

#3 pivot comuni ad A e $A|b \Rightarrow \rho(A) = \rho(A|b) = 3 \Rightarrow \exists!$ solut.

(anche con Rouché-Capelli)

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ 2b = 4 \\ c = 3 \end{cases} \begin{cases} a = b - c + 2 = 2 - 3 + 2 = 1 \\ b = 2 \\ c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix}$$