GAL2024

Lezione 6

- Dipendenza lineare
- Condizioni di una base
- Basi del nucleo e di Span lineare
- Rango di una matrice e una mappa lineare
- Teorema di rango più nullità.

ALG: Capitolo 4: §7 (dipendenza lineare); pp. 177-180; 201-209;

Riguardo condizioni di una base, il tema si tratta in §8 di Cap. 4, ma con approccio diverso dal nostro.

Nella Lezione 5, abbiamo visto che ogni retta ammette l'equazione parametrica di forma

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R}, \qquad (1)$$

ed ogni piano ammette l'equazione parametrica di forma

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad s, t \in \mathbb{R}. \qquad (2)$$

La nostra domanda adesso è:

è vero che equazioni di forma (1) e (2) sempre determinano rette e piani?

Più precisamente:

(i) dati vettori $\vec{r}_0$ e $\vec{a}$,

l'equazione (1) veramente

descrive una retta?

(ii) dati vettori $\vec{r}_0$, $\vec{u}$, $\vec{v}$,

l'equazione (2) veramente

descrive un piano?

Chiaro che le risposte non dipendono dal vettore $\vec{r}_0$, siccome spostando l'origine del sistema di riferimento possiamo sempre assumere che $\vec{r}_0 = \vec{0}$.

- La risposta alla <u>domanda (i)</u>

è abbastanza ovvia:

- se $\vec{a} = \vec{0}$, allora (1) si riduce a $\vec{r} = \vec{r}_0$ e quindi l'equazione descrive l'insieme composto da uno solo punto e <u>non una retta</u>.

- se $\vec{a} \neq \vec{0}$, allora $\exists!$ retta l passante per i punti $A \neq B$ i cui vettori di posizione sono $\vec{r}_0$ e $\vec{r}_1 := \vec{r} + \vec{a}$.

In tal caso, l'equazione parametrica della retta l è esattamente l'equazione (1).

Pertanto:

l'equazione di forma

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, \quad t \in \mathbb{R},$$

descrive una retta

se e solo se

$$\vec{a} \neq \vec{0}.$$

- Domanda (ii) è solo un po' più complicata:

- se $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$, allora l'equazione $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u} + s\vec{v}$ descrive l'insieme $\{\vec{r}_0\}$ composto da uno solo punto;

- se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e $\vec{v}$ è un multiplo di $\vec{u}$,

cioè $\vec{v} = \lambda \vec{u}$ per un opportuno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$,

allora $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u} + s\vec{v}$

si riduce a

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + (t + \lambda s)\vec{u}$$

$$= \vec{r}_0 + \tau \vec{u},$$

con $\tau := t + \lambda s \in \mathbb{R}$,

che descrive una retta

e non un piano;

- se $\vec{u} \neq \vec{0}$ e se $\vec{v}$ non è un multiplo di $\vec{u}$

(in particolare, $\vec{v} \neq \vec{0}$)

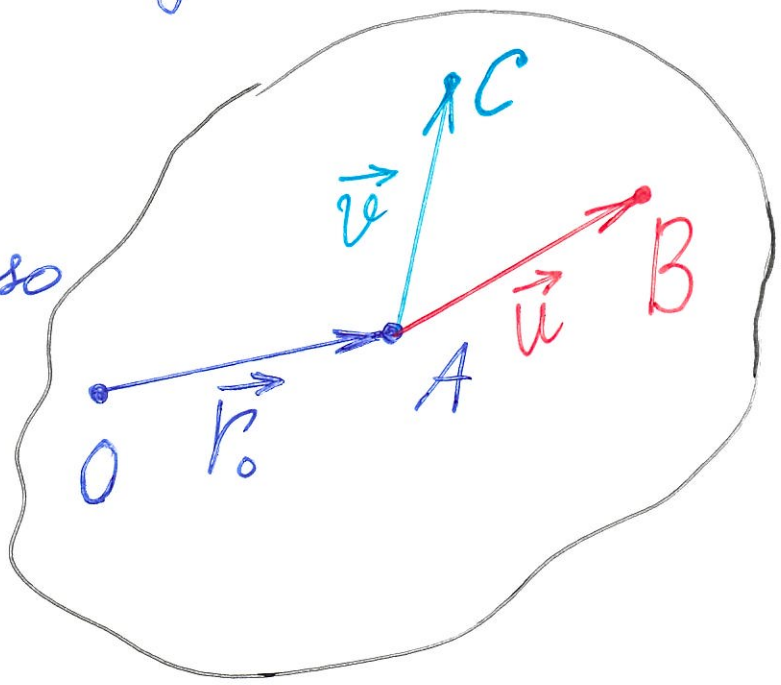
allora i tre punti A, B, C

i cui vettori di posizione sono

$\vec{r}_0$, $\vec{r}_1 := \vec{r}_0 + \vec{u}$, $\vec{r}_2 := \vec{r}_0 + \vec{v}$,

rispettivamente,

non appartengono alla stessa retta.



In questo caso

$\exists!$ piano Π

che passa per

i punti $A, B,$ e C. L'equazione parametrica di Π è esattamente l'equazione $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u} + s\vec{v}$, $t, s \in \mathbb{R}$.

Insomma, abbiamo due alternative:

(a) uno dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$
è un multiplo dell'altro;

(b) nessuno dei vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$
è un multiplo dell'altro.

Osservazione: l'alternativa (a)
include anche il caso $\vec{u} = \vec{v} = \vec{0}$:
$\vec{0} = \lambda \vec{0}$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Come abbiamo visto,
l'equazione

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u} + s\vec{v},$$

$$t, s \in \mathbb{R},$$

descrive un piano se e solo se si verifica (b). In tal caso, si dice che i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono linearmente indipententi.

Altrimenti, se si verifica (a), $\vec{u}$ e $\vec{v}$ si dicono linearmente dipendenti. Questo è un caso particolare di un concetto più generale:

Dipendenza lineare

Def Vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ di uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ si dicono linearmente dipendenti se $\exists\, \underline{c} \in \mathbb{K}^n$ non-nullo tale che

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \underline{v}_n = \underline{0}.$$

Altrimenti, se

$$c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \ldots + c_n \underline{v}_n = \underline{0}$$

vale solo con $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$,

allora $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ si dicono

linearmente indipendenti.

Esempio

$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti:

$$1\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + (-1)\begin{bmatrix} 7 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Esempio

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti:

$$0\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \underline{0}.$$

(1) In genere, se un sistema di vettori contiene $\underline{0}$, allora il questo sistema è linearmente dipendente.

Esempio

I vettori $\underline{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, e $\underline{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti:

$$1\,\underline{v}_1 + 0\,\underline{v}_2 + (-1)\,\underline{v}_3 = \underline{v}_1 - \underline{v}_3 = \underline{0}.$$

(2) In genere, se in un sistema di vettori qualche elemento si ripete due o più volte, allora il sistema è linearmente dipendente.

Proposizione 1

Sia V uno spazio vettoriale.
Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V$ vettori qualsiasi.
Le seguenti due affermazioni sono equivalenti tra di loro:

(i) i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti;

(ii) al meno uno dei vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ si scrive come combinazione lineare degli altri.

Dimostrazione

(ii) $\Rightarrow$ (i) Supponiamo che $\underline{v}_j$ (per qualche j) è una combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{j-1}, \underline{v}_{j+1}, \dots, \underline{v}_n$,

cioè esistono $c_1, c_2, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_n$ tali che

$$\underline{v}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} c_k \underline{v}_k .$$

Allora ponendo $c_j := -1$ abbiamo

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \underline{v}_k = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} c_k \underline{v}_k + c_j \underline{v}_j =$$

$$= \underline{v}_j + (-1)\underline{v}_j = \underline{0}.$$

Siccome $c_j = -1 \neq 0$,

$$\underline{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n) \neq \underline{0}$$

e quindi, per definizione, i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente

dipendenti, cioè si verifica (i).

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supponiamo che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente <u>dipendenti</u>.

Allora $\exists\, \underline{c} \in \mathbb{K}^n$, $\underline{c} \neq \underline{0}$ t.c.

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \underline{v}_k = \underline{0}.$$

Siccome $\underline{c} \neq \underline{0}$, $\exists\, j$ t.c. $c_j \neq 0$.

Quindi

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} c_k \underline{v}_k + c_j \underline{v}_j = \underline{0},$$

cioè

$$\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} c_k \underline{v}_k = -c_j \underline{v}_j.$$

Pertanto $\underline{v}_j$ si scrive come combinazione lineare di

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_{j-1}, \underline{v}_{j+1}, \dots, \underline{v}_n :$$

$$\underline{v}_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} \left(-\frac{c_k}{c_j}\right) \underline{v}_k . \qquad \blacksquare$$

Corollario

Due vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2 \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo se uno dei questi vettori è un <u>multiplo</u> dell'altro, cioè se $\exists\, \lambda \in \mathbb{K}$ t.c.

$\underline{v}_1 = \lambda \underline{v}_2$ oppure $\underline{v}_2 = \lambda \underline{v}_1$.

Esempio

$\underline{v}_1 := \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 := \begin{bmatrix} 4 \\ 4/3 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono linearmente dipendenti, perché

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 4/3 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

mentre $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché

$$6 : 3 = 2 : 1 \neq 3 : 2.$$

Esempio

$V = \{$ funzioni differenziabili $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$,

$f, g \in V$, $f(t) := \sin t$,

$g(t) := \cos t$, $t \in \mathbb{R}$.

Le funzioni f e g sono linearmente

dipendenti, perché esiste

nessuna costante $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$(\forall t \in \mathbb{R})$ $\sin t = \lambda \cos t$

oppure

$(\forall t \in \mathbb{R})$ $\cos t = \lambda \sin t$.

Esempio Per ogni $n \in \mathbb{N}$, la base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}$ di $\mathbb{K}^n$ è un sistema linearmente indipendente.

Se al contrario $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ siano linearmente dipendenti, allora per Proposizione 1 dovrebbe esistere j t.c. $\underline{e}_j$ si

scrive come combinazione lineare dei vettori $\underline{e}_k$ con $k \neq j$.

Comunque la j-esima componente dei questi vettori è nulla.

Ne segue che la j-esima componente di ogni combinazione lineare dei vettori $\underline{e}_k$ con $k \neq j$ è nulla, mentre la j-esima componente di $\underline{e}_j$ è uguale ad 1.

Dunque $\underline{e}_j$ non può essere scritto come combinazione lineare degli altri elementi della base canonica.

La questa contraddizione dimostra che $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$ sono linearmente indipendenti.

Osservazioni L'esempio precedente è un caso particolare del fatto generale: ogni base (di uno spazio vettoriale qualsiasi) è un sistema linearmente indipendente.

In fatti, sia $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ una base (di uno spazio vettoriale V).

Banalmente, se $\underline{c} = \underline{0} \in \mathbb{K}^n$, allora

(a) $c_1 \underline{v}_1 + c_2 \underline{v}_2 + \dots + c_n \underline{v}_n = \underline{0}$.

Supponiamo per assurdo che i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti.

Allora per definizione, $\exists\, \underline{c}' \in \mathbb{K}^n$, $\underline{c}' \neq \underline{0}$ t.c.

(b) $c_1' \underline{v}_1 + c_2' \underline{v}_2 + \dots + c_n' \underline{v}_n = \underline{0}$.

Quindi, lo stesso vettore di V, il vettore nullo $\underline{0}$, si scrive come due distinti combinazioni lineari di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$.

Ma questo contraddice alla definizione di una base.

Dunque, se $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ è una base, allora $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente.

In realtà vale una affermazione più forte:

Teorema 2

(condizioni di essere una base)

Sia V uno spazio vettoriale e

sia $\mathcal{B}$ un sistema di n vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in V$.

Le seguenti affermazioni sono equivalenti tra di loro:

(a) $\mathcal{B}$ è una base di V;

(b) si verificano le seguenti due condizioni:

(b.1) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti e

(b.2) $\dim V = n$;

(c) si verificano le seguenti due condizioni:

(c.1) $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti e

(c.2) esiste nessuno vettore $\underline{u} \in V$

tale che $n+1$ vettori

$$\underline{u}, \underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n$$

sono linearmente indipendenti.

[saltiamo la dimostrazione].

Esempio $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti perché $1:2 \neq 2:1$.

Ne segue che $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$ formano una base di $\mathbb{R}^2$.

Anche i vettori $\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti (per la stessa ragione) ma non formano una base di $\mathbb{R}^3$ perché $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

e quindi nessuna base di $\mathbb{R}^3$ può consistere di 2 vettori.

Abbiamo una necessità urgente di metodo di determinare se un sistema di vettori dato $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\}$ è linearmente dipendente o indipendente.

Nel caso dello spazio $V = \mathbb{K}^m$. C'è un metodo efficace.

Se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n \in \mathbb{K}^m$, allora l'uguaglianza

$$\underline{c}_1 \underline{v}_1 + \underline{c}_2 \underline{v}_2 + \ldots + \underline{c}_n \underline{v}_n = \underline{0}$$ si può

scrivere come il sistema lineare omogeneo

$$(*) \qquad A\underline{c} = \underline{0}$$

rispetto al vettore delle incognite

$$\underline{c} := (c_1, c_2, \dots, c_n)$$

la cui matrice dei coefficienti è data da $A := [\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \dots | \underline{v}_n]$.

Per la definizione della dipendenza lineare, i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente indipendenti se e solo se il sistema $(*)$ ammette solo la soluzione banale

$$\underline{c} = \underline{0}.$$

Per il teorema di Rouché-Capelli

questo accade se e solo se

$$\boxed{r(A) = n}$$

$r(A)$: il rango di A; n: # vettori

Esempio

$$\underline{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

sono linearmente dipendenti perché il rango di

$$A := [\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \underline{v}_3] = 2 < 3.$$

Infatti $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Il rango è uguale al # righe non-nulle nella

matrice ridotta.)

Esempio

$$\underline{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

linearmente dipendenti?

Soluzione

$$A := [\underline{v}_1 \,|\, \underline{v}_2 \,|\, \underline{v}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

Quindi $r(A) = 3 = \#$ vettori.

Ne segue che $\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

Inoltre, $\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_3$ formano una base

di $\mathbb{R}^3$, perché sono 3 vettori linearmente indipendenti nello spazio di dimensione $\dim \mathbb{R}^3 = 3$.

Caso di uno spazio vettoriale qualsiasi.

Proposizione 2

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e sia $\mathcal{B}$ una base di V.

Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vettori qualsiasi dello spazio V.

Per $k = 1, \dots, n$, chiamiamo $\underline{c}_k$ il vettore delle coordinate di $\underline{v}_k$.

Allora i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono

linearmente indipendenti se e solo se i loro vettori delle coordinate

$\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n$ sono

linearmente indipendenti.

(saltiamo la dimostrazione)

Esempio Determinare se i polinomi

$f_1(x) := x^2 - x + 1,$

$f_2(x) := x^2 + x - 1,$

$f_3(x) := x^2 + x + 1.$

Soluzione: $f_1, f_2, f_3 \in P_2 = \{$polinomi di grado $\leq 2\}$.

Una base di P_2 è

$\beta := \{p_0, p_1, p_2\}$ con $p_k(x) := x^k$, $k = 0, 1, 2.$

I vettori delle coordinate di f_1, f_2, f_3 rispetto alla base $\mathcal{B}$ sono:

$$\underline{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underline{c}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Riduciamo la matrice $A := [\underline{c}_1 | \underline{c}_2 | \underline{c}_3]$ a scala:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Siccome $r(A) = 3 = \#$ vettori,

$\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{c}_3$ sono linearmente indipendenti.

Per la Proposizione 2, ne segue che

anche i polinomi f_1, f_2, f_3 sono linearmente indipendenti.

Caso $\dim V = +\infty$ è più difficile (siccome V non ammette basi finite). Comunque vale:

Proposizione 3

Sia $L: V \to W$ una mappa lineare.

Siano $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ vettori qualsiasi nello spazio V.

Per $k = 1, \dots, n$, chiamiamo $\underline{w}_k := L(\underline{v}_k)$.

Se i vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti, allora anche le loro immagini

$\underline{w}_1, \underline{w}_2, \dots, \underline{w}_n$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione

Siccome per l'ipotesi, $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$ sono linearmente dipendenti,

$$\exists\, \underline{c} \in \mathbb{K}^n,\ \underline{c} \neq \underline{0} \quad \text{t.c.}$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \underline{v}_k = \underline{0}.$$

Siccome $\mathcal{L}$ è lineare,

$$\mathcal{L}(\underline{0}) = \underline{0} \quad \text{e} \quad \mathcal{L}\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \underline{v}_k\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \mathcal{L}(\underline{v}_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} c_k \underline{w}_k.$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \underline{w}_k = \underline{0} \quad \text{con} \quad \underline{c} \neq \underline{0}.$$

Dunque per definizione,

$\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_n$ sono linearmente dipendenti.

Esempio $V := C^\infty(\mathbb{R}) = \{$ funzioni $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenziabili ∞-te volte $\}$,

f_1, f_2, f_3 sono date da

$f_1(x) := \cos x$, $f_2(x) := \cos(2x)$,

$f_3(x) := \sin x$.

Dimostrare che f_1, f_2, f_3 sono linearmente indipendenti.

Soluzione Consideriamo la mappa lineare $L: V \to \mathbb{R}^3$ data da

$$\mathcal{L}(f) := \begin{bmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \end{bmatrix}.$$

Le immagini di f_1, f_2 ed f_3 sono

$$\underline{w}_1 := \mathcal{L}(f_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\underline{w}_2 := \mathcal{L}(f_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix},$$

$$\underline{w}_3 := \mathcal{L}(f_3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$A := [\underline{w}_1 | \underline{w}_2 | \underline{w}_3] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Quindi, il rango di A

$$r(A) = 3 = \#\text{ vettori.}$$

Ne segue che $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3$ sono linearmente indipendenti.

Per Proposizione 3, l'immagini di vettori linearmente dipendenti non possono essere linearmente indipendenti.

Dunque f_1, f_2, f_3 sono linearmente indipendenti.

Osservazione (1)

Sia $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ un sistema di vettori linearmente indipendente.

Allora ogni sottosistema di $\mathcal{B}$,

$$\mathcal{B}' := \{\underline{v}_{k_1}, \underline{v}_{k_2}, \dots, \underline{v}_{k_m}\},$$

$$1 \leq k_1 < k_2 < \dots < k_m \leq n,$$

è linearmente indipendente.

L'affermazione equivalente:

Se un sottosistema B' è linearmente dipendente, allora B è per forza linearmente dipendente.

Perché è vera?

Si spiega con un esempio

$$B := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\} \subset \mathbb{R}^4$$

$$\underline{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix},$$

$$\underline{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_4 := \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Il sottosistema $B' := \{\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$

è linearmente dipendente:

$$\underbrace{1\,\underline{v}_1 + (-1)\,\underline{v}_3 + 1\,\underline{v}_4}_{} = \underline{0}$$

una combinazione lineare

di $\underline{v}_1, \underline{v}_3, \underline{v}_4$,

che può essere anche considerata una combinazione lineare

di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4$:

$$1\,\underline{v}_1 + 0\,\underline{v}_2 + (-1)\,\underline{v}_3 + 1\,\underline{v}_4 = \underline{0}.$$

Allora per definizione,

$\beta = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4\}$ è linearmente dipendente.

Esempio i vettori $\underline{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$\underline{v}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_3 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sono linear-

mente dipendenti perché

$\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono linearmente dipendenti: $\underline{v}_2 = 2\,\underline{v}_1$.

Osservazione (2)

Se $\dim V =: n < m$, allora ogni m vettori in V sono linearmente dipendenti.

Infatti, consideriamo m vettori qualsiasi

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_m \in V.$$

Supponiamo per assurdo che i questi vettori sono linearmente indipendenti.

Allora, per Osservazione (1),
i primi n vettori

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$$

sono linearmente indipendenti.
Quindi, per il teorema sulle condizioni di essere una base (Teorema 2),

$$\mathcal{B}' := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$$

è una base di V.
In particolare, il vettore $\underline{v}_{n+1}$ si scrive come combinazione lineare di $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n$.
Dunque, per Proposizione 1,

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n, \underline{v}_{n+1}$$

sono linearmente dipendenti.

Ne segue (Osservazione 1)

che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m$ sono

linearmente dipendenti.

Contraddizione!

(abbiamo iniziato dall'ipotesi che

$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_m$ sono linearmente

indipendenti)

Esempio

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ sono linearmente

dipendenti perché appartengono

allo spazio $\mathbb{R}^2$ di dimensione $= 2$

inferiore del numero di vettori $= 3$.

Osservazione 3

Dal punto di vista formale, la definizione di dipendenza lineare si applica anche ad un sistema composta da un vettore:

$$\mathcal{B} := \{\underline{v}\}.$$

Tal sistema $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente se e solo se $\underline{v} \neq \underline{0}$.

(Perché?)

Problema: in uno spazio vettoriale V dato un sottospazio W generato da un numero finito di vettori

$$\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \in V,$$

trovare una base di W.

Proposizione 1

Sia V uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$ un sistema di vettori in V.

Sia $\mathcal{B}'$ un sottosistema (non-vuota) di $\mathcal{B}$.

Allora $\mathcal{B}'$ è una base di

$$W := \text{span}(\mathcal{B}) = \text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$$

se e solo se si verificano

le seguenti due condizioni:

(i) $\mathcal{B}'$ è linearmente indipendente;

(ii) $\mathcal{B} \subset \text{span}(\mathcal{B}')$, cioè ogni vettore di $\mathcal{B}$ si scrive come combinazione lineare dei vettori del sottosistema $\mathcal{B}'$

In particolare, se $\mathcal{B}$ è linearmente indipendente, allora $\mathcal{B}$ è una base di $W := \text{span}(\mathcal{B})$.

Esempio (una base di nucleo di una matrice)

Trovare una base di $\ker(A)$,

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

$\ker(A)$ è l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$A\underline{x} = \underline{0}, \quad \underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4).$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 5 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1} & 1 \end{bmatrix}$$

$x_1\ x_2\ x_3\ x_4$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, & \text{dipendenti} \\ -x_3 + x_4 = 0. & \text{libere} \end{cases}$$

$x_2 := s$, $x_4 := t$.

Le soluzioni sono

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{bmatrix} -(2s+7t) \\ s \\ t \\ t \end{bmatrix}, \quad s, t \in \mathbb{K}.$$

In altre parole, $\ker(A)$ (= l'insieme delle soluzioni) coincide con l'immagine della mappa

$$\mathcal{L}: \mathbb{K}^2 \to \mathbb{K}^4,$$

$$\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}\right) := \begin{bmatrix} -(2s+7t) \\ s \\ t \\ t \end{bmatrix}.$$

Scegliamo in $\mathbb{K}^2$ una base, per esempio, la base canonica $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Allora $\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix} = s\,\underline{e}_1 + t\,\underline{e}_2$.

La mappa $\mathcal{L}$ è lineare e quindi $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}\right) = \mathcal{L}(s\,\underline{e}_1 + t\,\underline{e}_2) =$

$$= s\,\mathcal{L}(\underline{e}_1) + t\,\mathcal{L}(\underline{e}_2).$$

Ne segue che

$$\ker(A) = \mathrm{im}(\mathcal{L}) =$$

$$= \mathrm{span}\{\mathcal{L}(\underline{e}_1), \mathcal{L}(\underline{e}_2)\}$$

Siccome s e t sono la 2nda e la 4ta componenti di $\mathcal{L}\left(\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}\right)$, $\mathcal{L}$ è <u>iniettiva</u>.

Ne segue che

$$\underline{v}_1 := \mathcal{L}(\underline{e}_1), \quad \underline{v}_2 := \mathcal{L}(\underline{e}_2)$$

sono <u>linearmente indipendenti</u> perché i loro immagini

rispetto a $\mathcal{L}^{-1} : im(\mathcal{L}) \to \mathbb{K}^2$,

cioè:

$$\mathcal{L}^{-1}(\underline{v}_1) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\underline{e}_1)) = \underline{e}_1$$

$$\mathcal{L}^{-1}(\underline{v}_2) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{L}(\underline{e}_2)) = \underline{e}_2$$

sono linearmente indipendenti

(Proposizione 3)

Conclusione:

$\ker(A) = \text{span}\{\mathcal{L}(\underline{e}_1), \mathcal{L}(\underline{e}_2)\}$,

i vettori $\mathcal{L}(\underline{e}_1)$ e $\mathcal{L}(\underline{e}_2)$ sono linearmente indipendenti.

Dunque per Proposizione 1,

$\{\mathcal{L}(\underline{e}_1), \mathcal{L}(\underline{e}_2)\}$ è una base di $\ker(A)$.

$L(\underline{e}_1)$ è la soluzione di $A\underline{x}=\underline{0}$ per i valori delle variabili libere $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underline{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, e

$L(\underline{e}_2)$ è la soluzione di $A\underline{x}=\underline{0}$ per $\begin{bmatrix} x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \underline{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$L(\underline{e}_1) = L\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$L(\underline{e}_2) = L\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Esempio Trovare una base e la dimensione di

$$W := \operatorname{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\},$$

dove $\underline{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{v}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix}$,

$\underline{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Soluzione

$\underline{v}_2 = 2\,\underline{v}_1$ e quindi $\underline{v}_1, \underline{v}_2$ sono linearmente dipendenti.

Ne segue che $\mathcal{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ è linearmente dipendente, e quindi $\mathcal{B}$ non può essere una base di W.

Comunque $\mathcal{B}' := \{\underline{v}_1, \underline{v}_3\}$ è linearmente indipendente.

Inoltre è chiaro che $\underline{v}_2$ è una combinazione lineare dei vettori di $\mathcal{B}'$: $\underline{v}_2 = 2\underline{v}_1 + 0\underline{v}_3$.

Quindi, per Proposizione 1, $\mathcal{B}' = \{\underline{v}_1, \underline{v}_3\}$ è una base di $W = \text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.

Soluzione 2

(metodo generale per vettori in $\mathbb{K}^n$)

Scriviamo la matrice

$$A := [\underline{v}_1 \mid \underline{v}_2 \mid \underline{v}_3] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Riduciamo A a scala

$$\xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix} \underline{1} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{-1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{v}_1$ $\underline{v}_2$ $\underline{v}_3$

È un <u>teorema</u> che i vettori che corrispondono alle colonne con pivot formano una base di $W = \text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$.

Quindi, una base di W è

$$\{\underline{v}_1, \underline{v}_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Esempio (Basi del nucleo ed immagine di una mappa lineare)

Data la mappa lineare

$$L : P_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad P_2 := \{\text{polinomi di grado} \leq 2\},$$

definita da

$$L(p) := (p(0), p'(1), p''(0) + 2p(1)).$$

(a) trovare la dimensione ed una base di $\operatorname{im}(L)$;

(b) quale di due vettori $\underline{u} := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ appartiene all'$\operatorname{im}(L)$?

Trovare le sue coordinate rispetto alla base trovata in (a).

(c) trovare la dimensione ed una base di $\ker(L)$;

(d) La mappa L è biiettiva? suriettiva? iniettiva?

Soluzione

(a) Dato un polinomio $p \in P_2$, sviluppiamo p rispetto alla base di P_2 formata da p_0, p_1, p_2,

$$p_k(x) := x^k, \quad k = 0, 1, 2.$$

Se $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, allora

$p = a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2$ e per la linearità L,

$$L(p) = L(a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2) =$$

$$= a_0 \mathcal{L}(p_0) + a_1 \mathcal{L}(p_1) + a_2 \mathcal{L}(p_2).$$

Ne segue che

$$\mathrm{im}(\mathcal{L}) = \mathrm{span}\{\underline{v}_0, \underline{v}_1, \underline{v}_2\}$$

con $\underline{v}_k := \mathcal{L}(p_k)$, $k = 1, 2, 3$.

Def. Se $W = \mathrm{span}\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\}$, per qualche vettori $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n$ di uno spazio vettoriale V, allora si dice che $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n\}$ è un *insieme di generatori* del sottospazio W.

Nel nostro caso, $\{\underline{v}_0, \underline{v}_1, \underline{v}_2\}$ è un insieme di generatori di $\mathrm{im}(\mathcal{L})$.

È un fatto generale: per una mappa lineare $L: V \to U$, le immagini di una base di V formano un insieme di generatori di $\mathrm{im}(L)$.

Il questo insieme di generatori non è sempre una base di $\mathrm{im}(L)$, ma sempre contiene una base di $\mathrm{im}(L)$.

Torniamo al nostro esempio ed usiamo il metodo dall'esempio precedente.

$$\underline{v}_0 = L(p_0) = \begin{bmatrix} p_0(0) \\ p_0'(1) \\ p_0''(0) + 2p_0(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} p_1(0) \\ p_1'(1) \\ p_1''(0)+2p_1(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$\underline{v}_2 = \mathcal{L}(p_2) = \begin{bmatrix} p_2(0) \\ p_2'(1) \\ p_2''(0)+2p_2(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Scriviamo

$$A := [\underline{v}_0 \mid \underline{v}_1 \mid \underline{v}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Riduciamo A a scala:

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{v}_0$ $\underline{v}_1$ $\underline{v}_2$

Una base di $\mathrm{im}(\mathcal{L})$ è $\{\underline{v}_0, \underline{v}_1\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

$\dim \mathrm{im}(\mathcal{L}) = 2.$

(B) $\underline{u} := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\underline{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Per determinare se $\underline{u} \in \mathrm{im}(L)$ basta risolvere il seguente sistema lineare $A\underline{x} = \underline{u}$

con $A := [\underline{v}_0 | \underline{v}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$:

$$[A|\underline{u}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Ne segue che

$\underline{u} \in im(L)$ ed il suo vettore delle coordinate rispetto alla base $\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\2\end{bmatrix}\right\}$ è $\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$.

Verifichiamo se $\underline{v} \in im(L)$:

$$A\underline{x} = \underline{v}$$

$$[A \mid \underline{v}] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\2 & 2 & 1\end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_1} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 2 & -1\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 - 2R_2} \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & 1 & 1\\0 & 0 & -3\end{bmatrix}$$

Il sistema non ammette soluzioni.

Pertanto $\underline{v} \notin im(L)$.

(c) Per trovare una base di $\ker(L)$ consideriamo

la mappa

$$L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

definita da

$$L(a_0, a_1, a_2) := \mathcal{L}(a_0 p_0 + a_1 p_1 + a_2 p_2)$$

(in altre parole gli elementi di P_2 vengono identificati con i suoi vettori delle coordinate rispetto alla base formata da $p_0(x) := 1$, $p_1(x) := x$, $p_2(x) := x^2$)

Abbiamo: $\ker(L) = \ker(A)$

dove A è la matrice rappresentativa di L rispetto alle basi canoniche,

$$A = [L(\underline{e}_1) \mid L(\underline{e}_2) \mid L(\underline{e}_3)],$$

$$L(\underline{e}_1) = L(1,0,0) = \mathcal{L}(p_0) =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$L(\underline{e}_2) = L(0,1,0) = \mathcal{L}(p_1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$L(\underline{e}_3) = L(0,0,1) = \mathcal{L}(p_2) =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Allora $\ker(L) = \ker(A)$ = l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo:

$$A\,\underline{x} = \underline{0}.$$

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&2\\2&2&4\end{bmatrix}$$

la matrice ridotta di A è

(guardare pagina 16)

$$\begin{bmatrix}\textcircled{1}&0&0\\0&\textcircled{1}&2\\0&0&0\end{bmatrix} \qquad \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

$x_1\ x_2\ x_3$

C'è una variabile libera; quindi

$\ker(A) = \text{span}\{\underline{v}_1\}$,

dove $\underline{v}_1$ è la soluzione del sistema con $x_3 := 1$, cioè

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}.$$

Dunque una base di $\ker(L) = \ker(A)$ è formata dal vettore $\begin{bmatrix}0\\-2\\1\end{bmatrix}$. Un par-

ticolare, $\dim \ker(L) = 1$.

Al vettore $\begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ corrisponde

il polinomio $q := 0p_0 - 2p_1 + 1p_2$

cioè $q(x) = -2x + x^2$.

Pertanto $\ker(L) = \text{span}\{q\}$,
una base di $\ker(L)$ è $\{q\}$,
e $\dim \ker(L) = 1$.

(d) L è biiettiva? suriettiva? iniettiva?

L non è iniettiva perché

$\ker(L) \neq \{0\}$.

(Guardare Lezione 4: Teorema 2 —
la struttura delle controimmagini)

L non è suriettiva

perché $\dim \mathrm{im}(L) = 2$ è inferiore della dimensione del codominio di L, $\dim \mathbb{R}^3 = 3$

(e pertanto $\mathrm{im}(L) \neq \mathbb{R}^3$).

Una mappa è biiettiva se e solo se è iniettiva e suriettiva.

Pertanto L non è biiettiva.

Rango di una matrice ed una mappa lineare.

Ricordiamo che nella Lezione 1 abbiamo definito il rango di una matrice A come il numero di righe non-nulle nella matrice ridotta di A. In realtà il rango è direttamente connesso ai concetti di dimensione e di indipendenza lineare.

Def. Sia A una matrice $m \times n$ con elementi in $\mathbb{K}$.

Lo <u>spazio colonna</u> di A indicato con $\mathrm{Col}(A)$ è il sottospazio di $\mathbb{K}^m$ generato dalle colonne di A.

Lo <u>spazio riga</u> di A indicato con $\mathrm{Row}(A)$ è il sottospazio di $\mathbb{K}^n$ generato dalle righe di A.

<u>Esempio</u>

Sia $A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$. <u>Allora</u>:

$$\mathrm{Col}(A) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

e

$$\mathrm{Row}(A) = \mathrm{span}\left\{\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Def. Il rango per colonne di una matrice A è la dimensione dello spazio colonna di A, cioè

$$\dim \mathrm{Col}(A).$$

Il rango per righe di A è la dimensione dello spazio riga di A, cioè

$$\dim \mathrm{Row}(A).$$

Nell'esempio precedente, $\mathrm{Row}(A)$ è generato da due vettori $\begin{bmatrix}1\\3\\5\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}2\\4\\6\end{bmatrix}$. Siccome sono linearmente indipendenti, questi due vettori formano una base di $\mathrm{Row}(A)$. In particolare, il rango per righe di A è $\dim \mathrm{Row}(A) = 2$.

lo spazio colonna di A, $\mathrm{Col}(A)$ è generato da tre vettori $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}5\\6\end{bmatrix}$. Il questi vettori appartengono a $\mathbb{R}^2$ e quindi tra i loro si può trovare al massimo <u>due</u> vettori linearmente indipendenti. Il primi due vettori $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ sono linearmente indipendenti. Ne segue che $\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ formano una base di $\mathrm{Col}(A)$. In particolare, il rango di A per righe è $\dim \mathrm{Col}(A) = 2$.

Troviamo il rango di A:

$$A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 2 & 4 & 6\end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1} \begin{bmatrix}1 & 3 & 5\\ 0 & -2 & -4\end{bmatrix} =: U$$

$$r(A) = r(U) = 2.$$

Quindi, nel nostro esempio il rango per righe è uguale il rango per colonne, quale a sua volta è uguale al rango di A.

Teorema 1 (sul rango di una matrice)

Per ogni matrice A,
il rango di A,
il rango per colonne della matrice A,
ed il rango per righe della matrice A
coincidano tra i loro.

(senza la dimostrazione)

Osservazione

Sia A una matrice $m \times n$.

L'immagine della mappa rappresentata dalla matrice A,

$$\mathcal{L}_A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m,$$

è

$$\text{im}(\mathcal{L}_A) = \{\mathcal{L}_A(\underline{x}) : \underline{x} \in \mathbb{K}^n\} =$$

$$= \{A\underline{x} : x \in \mathbb{K}^n\} =$$

$$= \{x_1\underline{v}_1 + x_2\underline{v}_2 + \dots + x_n\underline{v}_n : (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n\}$$

dove $\underline{v}_j$, $j = 1, \dots, n$, indica la j-esima colonna di A.

Quindi,

$$\text{im}(\mathcal{L}_A) = \text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\} =$$

per definizione

$$= \text{Col}(A).$$

In particolare

$$\dim \operatorname{im}(L_A) = r(A).$$

↑ si indica il rango di A.

Def

Il rango di una mappa lineare $L: V \to W$, $r(L)$ è la dimensione della sua immagine, cioè $\dim \operatorname{im}(L)$.

Esempio

Data la mappa $L: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$L(x,y,z) := (x+y, x+y+z, x+y-z).$$

Trovare $r(L)$.

Soluzione $r(L)$ coincide con il rango della matrice rappresentativa di L,

$$A = [L(\underline{e}_1) \mid L(\underline{e}_2) \mid L(\underline{e}_3)] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 \to R_2 - R_1 \\ R_3 \to R_3 - R_1 \end{matrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2} \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dunque, $r(L) = r(A) = 2$.

Teorema 2 (di rango più nullità)

Sia $L : V \to W$ una mappa lineare di uno spazio vettoriale V con $\dim V =: n < +\infty$.

Allora

(1) $$r(L) + \dim \ker(L) = n$$

(dimensione del dominio).

Osservazione: l'uguaglianza di sopra non contiene la dimensione del codominio.

La dimensione di $\ker(L)$ si chiama la nullità della mappa L.

In parole vaghe, la nullità è il numero delle direzioni "cancellate" dalla mappa L. Nell'immagine rimangono $n - \dim \ker(L)$ direzioni indipendenti, e pertanto

$$r(L) = \dim \operatorname{im}(L) = n - \dim \ker(L)$$

Dimostrazione di Teorema 2.

Per semplicità, presentiamo la dimostrazione nel caso di una mappa

$$L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m.$$

Per il teorema di rappresentazione

(Teorema 4 nella Lezione 4)

esiste una matrice A di tipo $m \times n$

tale che $L = L_A$, cioè

$$L(\underline{x}) = A\underline{x} \quad \text{per ogni } \underline{x} \in \mathbb{K}^n.$$

Abbiamo

$$r(L) = r(A)$$

e $\ker(L) = \ker(A)$.

Il nucleo di A, $\ker(A)$ è l'in-

sieme delle soluzioni di

$$A\underline{x} = \underline{0}, \quad \underline{x} \in \mathbb{K}^n.$$

La dimensione di $\ker(A)$ è uguale al numero delle variabili libere, cioè ad $n - r(A)$.

Quindi,

$$\dim \ker(A) = n - r(A).$$

Pertanto $n = \dim \ker(A) + r(A) =$

$$= \dim \ker(L) + r(L). \quad \blacksquare$$

Esempio

Trovare $\dim \ker(A)$,

dove $A := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$.

Soluzione

A è di tipo 3×4.

La mappa L_A rappresentata dalla matrice A è una mappa di $\mathbb{R}^4$ in $\mathbb{R}^3$. La dimensione del codominio non è rilevante. È importante la dimensione del dominio,

$$n = \dim \mathbb{R}^4 = 4.$$

Troviamo il rango di A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_3 \to R_3 - R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 - R_2}$$

$$\to \begin{bmatrix} \textcircled{1} & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & 1 \end{bmatrix} =: U$$

$$r(A) = r(U) = 3.$$

Quindi,

$$\boxed{\dim \ker(A) = n - r(A) = \\ = 4 - 3 = 1.}$$

Esempio

Trovare la dimensione di $\ker(L)$, dove $L : P_2 \to R$ è la mappa lineare che associa ad ogni $p \in P_2 := \{\text{polinomi di grado} \leq 2\}$ l'integrale $L(p) := \int_0^1 p(x)\,dx$.

Soluzione

Chiaro che $\text{im}(L) \neq \{0\}$, perché ci sono polinomi $p \in P_2$

tale che $\mathcal{L}(p) \neq 0$.

Quindi, $r(\mathcal{L}) = \dim \operatorname{im}(\mathcal{L}) > 0$.

Comunque $\operatorname{im}(\mathcal{L}) \subseteq \mathbb{R}$

$\Rightarrow \ker \operatorname{im}(\mathcal{L}) \leq \dim \mathbb{R} = 1$.

($\mathbb{R}$ è identificato con $\mathbb{R}^1$)

Pertanto $r(\mathcal{L}) = 1$.

Siccome $\dim P_2 = 3$,

per il teorema di rango più nullità, abbiamo

$$\dim \ker(\mathcal{L}) = \dim P_2 - r(\mathcal{L}) =$$
$$= 3 - 1 = 2.$$

In fatti possiamo controllare il risultato:

$p(x) := a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

appartiene $\ker(A)$ se e solo se

$$\int_0^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx = 0,$$

ma $$\int_0^1 (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)\,dx =$$

$$= a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{3}.$$

Le soluzioni sono di forma

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{s}{2} - \frac{t}{3} \\ s \\ t \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quindi, $\ker(L) = \text{span}\{q_1, q_2\}$, dove

$q_1(x) := -\frac{1}{2} + x$, $q_2(x) := -\frac{1}{3} + x^2$.

I vettori $(-\frac{1}{2}, 1, 0)$ e $(-\frac{1}{3}, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti, perciò i polino-

mi q_1 e q_2 sono linearmente indipendenti. Ne segue che $\{q_1, q_2\}$ è una base di $\ker(L)$.

In particolare, $\dim \ker(L) = 2$.

Di più sullo spazio colonna

Lasciamo l'interpetazione geometrica dello spazio riga per la prossima lezione è facciamo un'altra occhiata sullo spazio colonna.

Esempio

Stabilire se i punti $P_1(1, 2, 3)$ e $P_2(3, 2, 1)$ appartengono al piano Π di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2t + s, \\ z = 1 - s. \end{cases} \qquad (\Pi)$$

Soluzione 1

Sostituendo le coordinate del punto P_1 per x, y, z nelle equazioni (Π) otteniamo il sistema

$$\begin{cases} 1 = -1 + t, \\ 2 = 2t + s, \\ 3 = 1 - s, \end{cases}$$

che ammette una soluzione

$$t = 2, \quad s = -2.$$

Pertanto $P_1 \in \Pi$.

Similarmente, per il punto $P_2(3,2,1)$ abbiamo il sistema

$$\begin{cases} 3 = -1 + t, \\ 2 = 2t + s, \\ 1 = 1 - s, \end{cases}$$

che non ammette soluzioni. Ne segue che $P_2 \notin \Pi$.

Oss: un sistema ottenuto in questo

modo non può aver più di una soluzione. (Pourquoi?)

Soluzione 2 Usiamo un punto di visto più astratto.

Scriviamo le equazioni param. (Π) nella forma vettoriale

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t\,\underline{u} + s\,\underline{v},$$

dove $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{u} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\underline{v} := \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Il punto $P_1(1,2,3)$ appartiene al piano Π se e solo se

il vettore $\underline{b} := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

si può rappresentare come combinazione lineare di $\underline{u}$ e $\underline{v}$, cioè se e solo se

$$\underline{b} \in Col(A) \text{ con } A := [\underline{u} \mid \underline{v}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

A sua volta l'ultima condizione è equivalente a

$$Col([A \mid \underline{b}]) = Col(A),$$

che a sua volta $\Longleftrightarrow$

$$\underbrace{\dim \mathrm{Col}([A\,|\,\underline{b}])}_{r([A\,|\,\underline{b}])} = \underbrace{\dim \mathrm{Col}(A)}_{r(A)}$$

Oss: la stessa conclusione:

$$P_1 \in \Pi \iff r([A\,|\,\underline{b}]) = r(A),$$

segue anche dal teorema di Rouché-Capelli applicata al sistema

$$A \begin{bmatrix} t \\ s \end{bmatrix} = \underline{b}.$$

In ogni caso,

$$r(A) = 2$$

perché A è composta da 2

colonne linearmente indipendenti.

Per calcolare $r([A|\underline{b}])$ usiamo MEG:

$$[A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

e quindi, $r([A|\underline{b}]) = 2 = r(A)$

$\Rightarrow \underline{P_1 \in \Pi}$

Per il punto $P_2(3,2,1)$ invece abbiamo:

$$\underline{b}_2 := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[A \mid \underline{b}_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Quindi,

$$r([A \mid \underline{b}_2]) = 3 > r(A) \Rightarrow \underline{P_2 \notin \Gamma}.$$

Esempio Scrivere l'equazione cartesiana del piano Π dell'esempio precedente.

Metodo 1 Già conosciamo un metodo: serve scrivere la matrice composta da u e v come righe $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ e trovare una base del nucleo $\ker(A^T)$ di questa matrice:

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ è già a scala

dipendenti

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_1 = -2$

valore non-nullo per la variabile libera

Quindi, $\ker(A^T) = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$.

Adesso possiamo scrivere l'equazione richiesta: $-2x + 1y + 1z = d :=$

$$:= -2x_0 + 1y_0 + 1z_0 = 3$$

cioè

$$\boxed{-2x + y + z = 3.}$$

Metodo 2

Consideriamo un punto generico

$P(x, y, z)$.

Abbiamo: $P \in \Pi$ se e solo se

$$\underline{b} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+1 \\ y \\ z-1 \end{bmatrix}$$

appartiene a $Col(A)$,

$$A := [\underline{u} \mid \underline{v}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Quindi, serve trovare

$r([A \mid \underline{b}])$ al variare

i parametri $x, y, e\ z$ e

determinare in quale caso

$$r([A|\underline{b}]) = 2.$$

$$[A|\underline{b}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 2 & 1 & y \\ 0 & -1 & z-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - 2R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 0 & 1 & y-2x-2 \\ 0 & -1 & z-1 \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x+1 \\ 0 & 1 & y-2x-2 \\ 0 & 0 & z+y-2x-3 \end{bmatrix}$$

Pertanto $r([A|\underline{b}]) = 2$

$\iff$ $\boxed{z+y-2x-3=0.}$

Esempio Scrivi le equazioni cartesiane dell'immagine

$$L(\text{span}\{\cos x\})$$

dello spazio generato da $f(x) := \cos x$ rispetto alla mappa

$$L : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

definita da

$$L(f) := \begin{bmatrix} f(0) \\ f'(0) \\ f''(0) \end{bmatrix}.$$

Soluzione

$V := \text{span}\{\cos x\}$. Siccome

$f_1(x) := \cos x$ non è funzione nulla,

$\mathcal{B} := \{f_1\}$ è una base di V.

$$\mathcal{L}(f_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pertanto, la matrice rappresentativa di $\mathcal{L}|_V : V \to \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\mathcal{B} = \{f_1\}$ nel dominio e la base canonica di $\mathbb{R}^3$ nel codominio è

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$. Un vettore $\underline{x} := \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ appartiene al $\mathcal{L}(V) = \mathrm{Col}(A)$ se e solo se

$$r([A|\underline{x}]) = r(A) = 1.$$

Usiamo MEG:

$$[A|\underline{x}] = \begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & y \\ -1 & z \end{bmatrix} \xrightarrow{R_3 \to R_3 + R_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & y \\ 0 & z+x \end{bmatrix}$$

Pertanto,

$$r([A|\underline{x}]) = 1 \iff \begin{cases} y = 0, \\ z + x = 0. \end{cases}$$