

GAL 2024

Lezione 5

- Passaggio tra due basi
- Geometria:
 - cambio delle coordinate sotto passaggio tra due basi;
 - equazioni parametriche di rette e piani;
- Intermezzo algebrico: passaggio tra rappresentazioni di un sottospazio come nucleo e come span;
- Più geometria: passaggio tra equazioni parametriche e cartesiane (di rette e piani)

- ALG: • pp. 221-224: passaggio tra basi; (2)
• Capitolo 1, §8.1-8.4 (pp. 46-58): equazioni di rette e piani;
• Capitolo 4, pp. 210-212: intermezzo algebrico.
-

Teorema 1 (di passaggio
tra due basi)

Siano

$$B := \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \}$$

$$\text{e } \tilde{B} := \{ \tilde{\underline{v}}_1, \tilde{\underline{v}}_2, \dots, \tilde{\underline{v}}_n \}$$

due basi di uno spazio
vettoriale V di dimensione $n < +\infty$.

Se $\underline{c} \in K^n$ e $\tilde{\underline{c}} \in K^n$ sono i vettori
delle coordinate di un stesso vettore
qualsiasi $\underline{v} \in V$ rispetto alla
base B e alla base $\tilde{B}$, rispettiva-
mente, allora

3

$$\underline{C} = S' \underline{\tilde{C}},$$

dove S' è la matrice di ordine n definita nel seguente modo:

$(\forall j=1, \dots, n)$ la j -esima colonna di S' è il ettore delle coordinate di $\underline{\tilde{v}}_j$ rispetto alla base B .

Inoltre S' è invertibile e

$$\text{quindi } \underline{\tilde{C}} = S'^{-1} \underline{C}.$$

La matrice S' nel teorema precedente si chiama la matrice di passaggio dalla base B alla base $\tilde{B}$.

Esempio

Date le coordinate c_1, c_2 di un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ rispetto alla

base $B := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2\}$

$$\underline{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

trovare le coordinate di $\underline{x}$

rispetto alla base $\tilde{B} := \{\tilde{\underline{v}}_1, \tilde{\underline{v}}_2\}$.

$$\tilde{\underline{v}}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\underline{v}}_2 := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione

$$\tilde{\underline{v}}_1 = \frac{1}{3} (\underline{v}_1 + \underline{v}_2) \quad \text{e} \quad \tilde{\underline{v}}_2 = \underline{v}_2 - \underline{v}_1.$$

Quindi, il vettore delle coordinate di

$\tilde{\underline{v}}_1$ rispetto a B è $\begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$

ed il vettore delle coordinate di

$\tilde{V}_2$ rispetto a B è $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(5)

Quindi, la matrice di passaggio da B a $\tilde{B}$ è

$$S = \begin{bmatrix} 1/3 & -1 \\ 1/3 & 1 \end{bmatrix}.$$

L'inversa di S è

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \frac{1}{1/3 - (-1/3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 3/2 & 3/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Per il teorema di passaggio,

$$\begin{bmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix},$$

$$\text{cioè} \quad \begin{bmatrix} \tilde{C}_1 = \frac{3}{2}(C_1 + C_2) \\ \tilde{C}_2 = \frac{1}{2}(C_2 - C_1). \end{bmatrix}$$

(*)

Teorema 2

(6)

(trasformazione della matrice
rappresentativa sotto cambiamento
delle basi)

Sia $L: V \rightarrow W$ una mappa lineare.

Siano B e $\tilde{B}$ due basi di V .

Siano C e $\tilde{C}$ due basi di W .

Se A è la matrice rappresentativa
di L rispetto alle basi B e C ,
e se $\tilde{A}$ è la matrice rappresentativa
di L rispetto alle basi $\tilde{B}$ e $\tilde{C}$,

allora
$$\tilde{A} = S_W^{-1} A S_V,$$

dove S_V è la matrice di passaggio
dalla base B alla base $\tilde{B}$

e S_W è la matrice di passaggio ⑦
dalla base C alla base $\tilde{C}$.

Dimostrazione

Fissiamo un vettore qualsiasi $\underline{v} \in V$.

Chiamiamo $\underline{b}$ e $\underline{\tilde{b}}$ i vettori delle coordinate di $\underline{v}$ rispetto a B e $\tilde{B}$ rispettivamente.

Chiamiamo $\underline{c}$ e $\underline{\tilde{c}}$ i vettori delle coordinate di $L(\underline{v})$ rispetto a C e $\tilde{C}$ rispettivamente.

Per il teorema di rappresentazione
(Teorema 5 in Lezione 4),

$$(1) \quad \underline{c} = A \underline{b} \quad e$$

$$(2) \quad \underline{\tilde{c}} = \tilde{A} \underline{\tilde{b}}.$$

Per il teorema di passaggio
tra due basi

(Teorema 1)

$$(3) \quad \underline{b} = S_V' \underline{\tilde{b}} \quad e$$

$$(4) \quad \underline{\tilde{c}} = S_W'^{-1} \underline{c}.$$

Usando (1) e (3) otteniamo:

$$\underline{c} = A \underline{b} = A S_V' \underline{\tilde{b}}.$$

Usando adesso (4), abbiamo

$$\underline{\tilde{c}} = S_W'^{-1} \underline{c} = S_W'^{-1} A S_V' \underline{\tilde{b}}.$$

Confrontiamo con (2):

$$\underline{\tilde{c}} = \underline{\tilde{A}} \underline{\tilde{b}}.$$

Quindi,

$$(5) \quad \underline{\tilde{A}} \underline{\tilde{b}} = (S_W'^{-1} A S_V') \underline{\tilde{b}}.$$

⑨

Il vettore $\tilde{b}$ è il vettore delle coordinate di $\underline{v} \in V$. Siccome $\underline{v}$ è un vettore qualsiasi, l'uguaglianza (5) vale per tutti $\tilde{b} \in K^n$ con $n := \dim V$.
Ne segue che $\tilde{A} = S_W^{-1} A S_V$. 

Esempio 1 Data la mappa lineare $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita dalla sua matrice rappresentativa rispetto alle basi canoniche

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}.$$

Trovare la matrice rappresentativa della mappa L rispetto alla base canonica nel codominio e alla

base del dominio composta dei vettori ⑩

$$\underline{v}_1 := \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \underline{v}_3 := \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Soluzione Applichiamo Teorema 1
Nel questo caso:

$$V := \mathbb{R}^3, \quad W := \mathbb{R}^2;$$

La base viene cambiata nel
dominio — dalla base canonica

$B := \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ alla base

$$\tilde{B} := \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}.$$

La matrice di passaggio dalla base
canonica alla base $\tilde{B}$,

$$S_V = [\underline{v}_1 | \underline{v}_2 | \underline{v}_3] = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

La base del codominio non

viene cambiata:

(11)

$$\tilde{C} = C = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\} \text{ (la base canonica),}$$

perciò

$$S_W^{-1} = S_W = I_2.$$

Quindi, per il teorema sulla trasformazione della matrice rappresentativa sotto il passaggio tra basi,

$$\tilde{A} = S_W^{-1} A S_V =$$

$$= A S_V =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

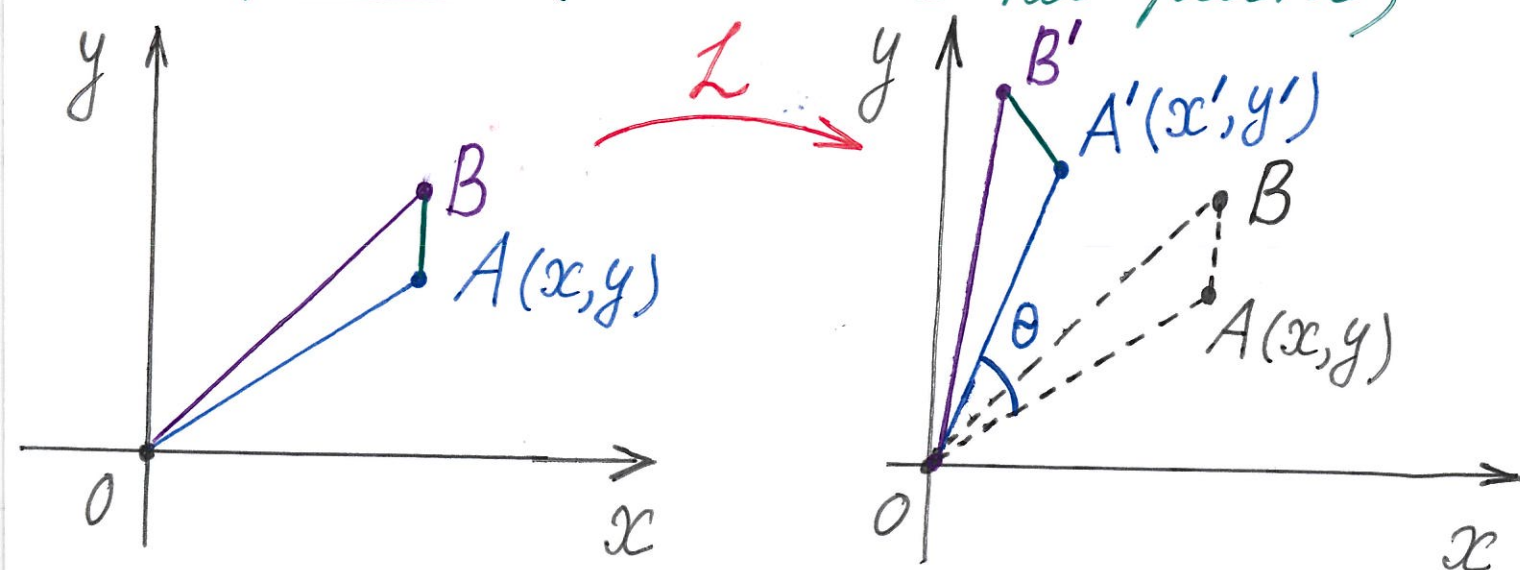
Questo vuol dire che se

$\tilde{\underline{b}} := (b_1, b_2, b_3)$ è il vettore delle coordinate di un vettore $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base $\tilde{B}$,

allora $L(\underline{x}) = \tilde{A} \tilde{\underline{b}} =$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 2b_2 \end{bmatrix}.$$

Esempio 2 (rotazione nel piano)



L è la rotazione di angolo θ in senso antiorario rispetto all'origine.

In coordinate, $L: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (13)
è data da

$$\begin{aligned} L(x, y) &= (x', y') = \\ &= (x \cos \theta - y \sin \theta, x \sin \theta + y \cos \theta). \end{aligned}$$

La matrice rappresentativa di L
rispetto alla base canonica è

$$A = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Consideriamo la mappa "complessifi-
cata" $L_{\mathbb{C}}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$ rappresentata
dalla stessa matrice A .

Cambiamo la base sia nel dominio
che nel codominio. Le basi di partenza
sono $B = C =$ base canonica di $\mathbb{C}^2$,

Le nuove basi sono

$$\tilde{B} = \tilde{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \right\}.$$

Sia nel dominio che nel codominio facciamo lo stesso passaggio, a la matrice di passaggio è

$$S_V = S_W = S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix}.$$

Quindi, per Teorema 1,

$$\tilde{A} = S_W^{-1} A S_V = S^{-1} A S.$$

Troviamo

$$S^{-1} = \frac{1}{-i-i} \begin{bmatrix} -i & -1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix}.$$

Donc,

$$\tilde{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \cos \theta - i \sin \theta & -\sin \theta - i \cos \theta \\ \cos \theta + i \sin \theta & -\sin \theta + i \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} =$$

$$\Leftrightarrow \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta}, \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \Leftrightarrow$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & -ie^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & ie^{i\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e^{-i\theta}(1+(-i)i) & e^{-i\theta}(1+(-i)(-i)) \\ e^{i\theta}(1+i \cdot i) & e^{i\theta}(1+i(-i)) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & e^{i\theta} \end{bmatrix} = \text{diag}(e^{-i\theta}, e^{i\theta}). \quad (16)$$

Osservazione. Data una mappa lineare $L: V \rightarrow V$ di uno spazio vettoriale di dimensione finita nello stesso, c'è un metodo di stabilire se esiste una base $\mathcal{B}$ dello spazio V (e, in caso affermativo, trovarla) rispetto a cui la matrice rappresentativa di L è diagonale.

Osservazione La matrice rappresentativa di una mappa lineare

$L: V \rightarrow W$ rispetto

ad una base B nel dominio V
ed una base C nel codominio W
della mappa L , spesso si
indica con $M_C^B(L)$.

- La matrice di passaggio S da una base B ad un'altra base $\tilde{B}$ dello stesso spazio V trasforma le coordinate di un generico vettore $\underline{v} \in V$ rispetto a $\tilde{B}$ nelle coordinate dello stesso vettore $\underline{v}$ rispetto a B .

Pertanto ci sono due interpretazioni della matrice di passaggio.

(I) S coincide con la matrice rappresentativa di

$$P_B^{-1} \circ P_{\tilde{B}} : K^n \rightarrow K^n$$

con $n := \dim V$,

rispetto alla base canonica di K^n .

Qui P_B e $P_{\tilde{B}}$ indicano le mappe di parameterizzazione associate alle basi B e $\tilde{B}$ rispettivamente.

(II) Da un altro punto di visto,

S coincide con la matrice rappresentativa $M_{\tilde{B}}^B(I)$

della mappa identità di V ,

(19)

$$I: V \rightarrow V,$$

rispetto alla base $\tilde{B}$ nel dominio
e la base B nel codominio.

La mappa identità di V

è la mappa definita da

$$(\forall \underline{v} \in V) \quad I(\underline{v}) := \underline{v}.$$

• Peraltro, se $S = M_{\tilde{B}}^{\tilde{B}}(I)$

è la matrice di passaggio
da B a $\tilde{B}$,

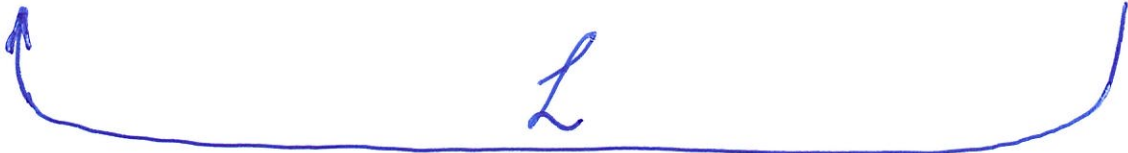
allora la sua inversa S^{-1}

è la matrice di passaggio
contrario, cioè da $\tilde{B}$ a B .

Quindi, $S^{-1} = M_{\tilde{B}}^B(I)$.

- Come risultato, la formula
nel Teorema 2 si può scrivere
così:

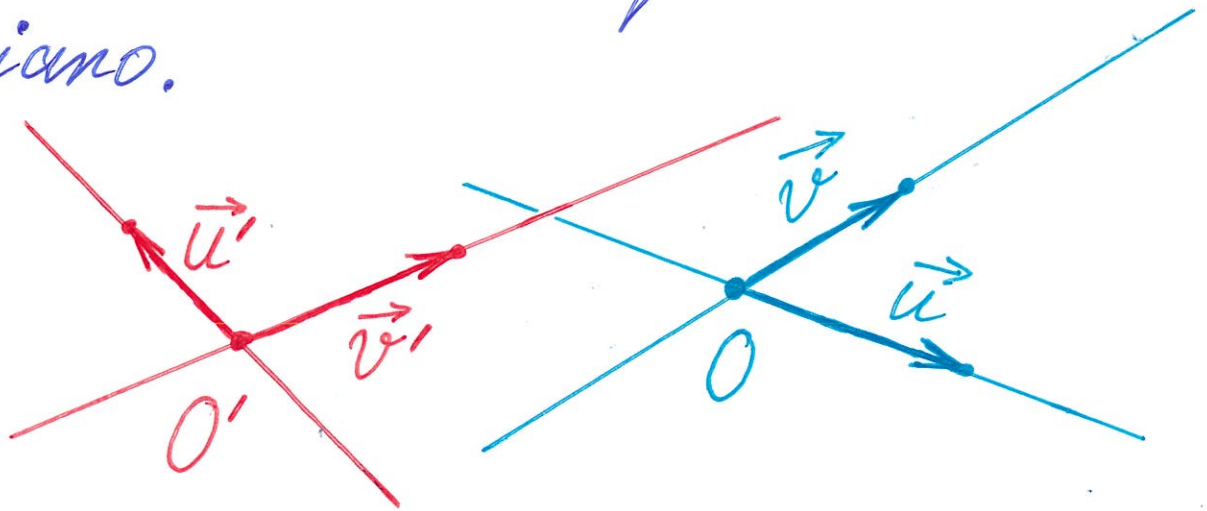
$$M_{\tilde{C}}^{\tilde{B}}(L) = M_{\tilde{C}}^C(I) M_C^B(L) M_B^{\tilde{B}}(I)$$

$$(W, \tilde{C}) \xleftarrow{I} (W, C) \xleftarrow{L} (V, B) \xleftarrow{I} (V, \tilde{B})$$


Adesso applichiamo
la nostra teoria di passaggio
tra basi al

Passaggio tra due sistemi
di riferimento.

Siano $(O, \vec{u}, \vec{v})$ e $(O', \vec{u}', \vec{v}')$
due sistemi di riferimento nel
piano.



Allora le coordinate (x, y) di un
generico vettore libero $\vec{r}$ del
piano rispetto a $(O, \vec{u}, \vec{v})$

sono le coordinate di $\vec{r}$

rispetto alla base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Allo stesso tempo le coordinate (x', y')
di $\vec{r}$ rispetto $(O', \vec{u}', \vec{v}')$ sono

le coordinate di $\vec{r}$

rispetto alla base $\{\vec{u}', \vec{v}'\}$.

(i punti O e O' in questo caso
non partecipano.)

Quindi,

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

dove S è la matrice di passaggio
da $\{\vec{u}, \vec{v}\}$ a $\{\vec{u}', \vec{v}'\}$.

La matrice di passaggio S
è data da

$$S = \begin{bmatrix} u'_x & v'_x \\ u'_y & v'_y \end{bmatrix}$$

dove (u'_x, u'_y) e (v'_x, v'_y)
sono coordinate di $\vec{u}'$ e $\vec{v}'$
rispetto al sistema $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Osservazione S^{-1} coincide con la
matrice di passaggio

da $\{\vec{u}', \vec{v}'\}$ a $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.

Quindi
$$S^{-1} = \begin{bmatrix} u_{x'} & v_{x'} \\ u_{y'} & v_{y'} \end{bmatrix}$$

dove $(u_{x'}, u_{y'})$ e $(v_{x'}, v_{y'})$

sono le coordinate di $\vec{u}$ e $\vec{v}$

rispetto il sistema di riferimento

$(0, \vec{u}', \vec{v}')$.

Cosa succede con le coordinate
dei punti sotto passaggio

tra $(0, \vec{u}, \vec{v})$ e $(0', \vec{u}', \vec{v}')$?

1° Caso particolare: $0' = 0$.

(le origini dei due sistemi
coincidano)

le coordinate di un punto P
sono le coordinate del suo
vettore di posizione.

(25)

Se $O' = O$, allora il vettore
 di posizione $\vec{r}'$ di P rispetto
 a $(O', \vec{u}', \vec{v}')$ coincide con
 quello risp. a $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

$$\vec{r} = \vec{OP}$$

$$\vec{r}' = \vec{O'P} \quad \parallel \quad \leftarrow \text{perché } O = O'$$

Quindi, se $O' = O$, allora per
 le coordinate di un punto
 rispetto i due sistemi di riferi-
 mento, vale la stessa relazione
 come per le coordinate di
 un vettore libero:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Esempio sia $(O, \vec{u}, \vec{v})$ un sistema di riferimento

cartesiano: $\vec{u} \perp \vec{v}$

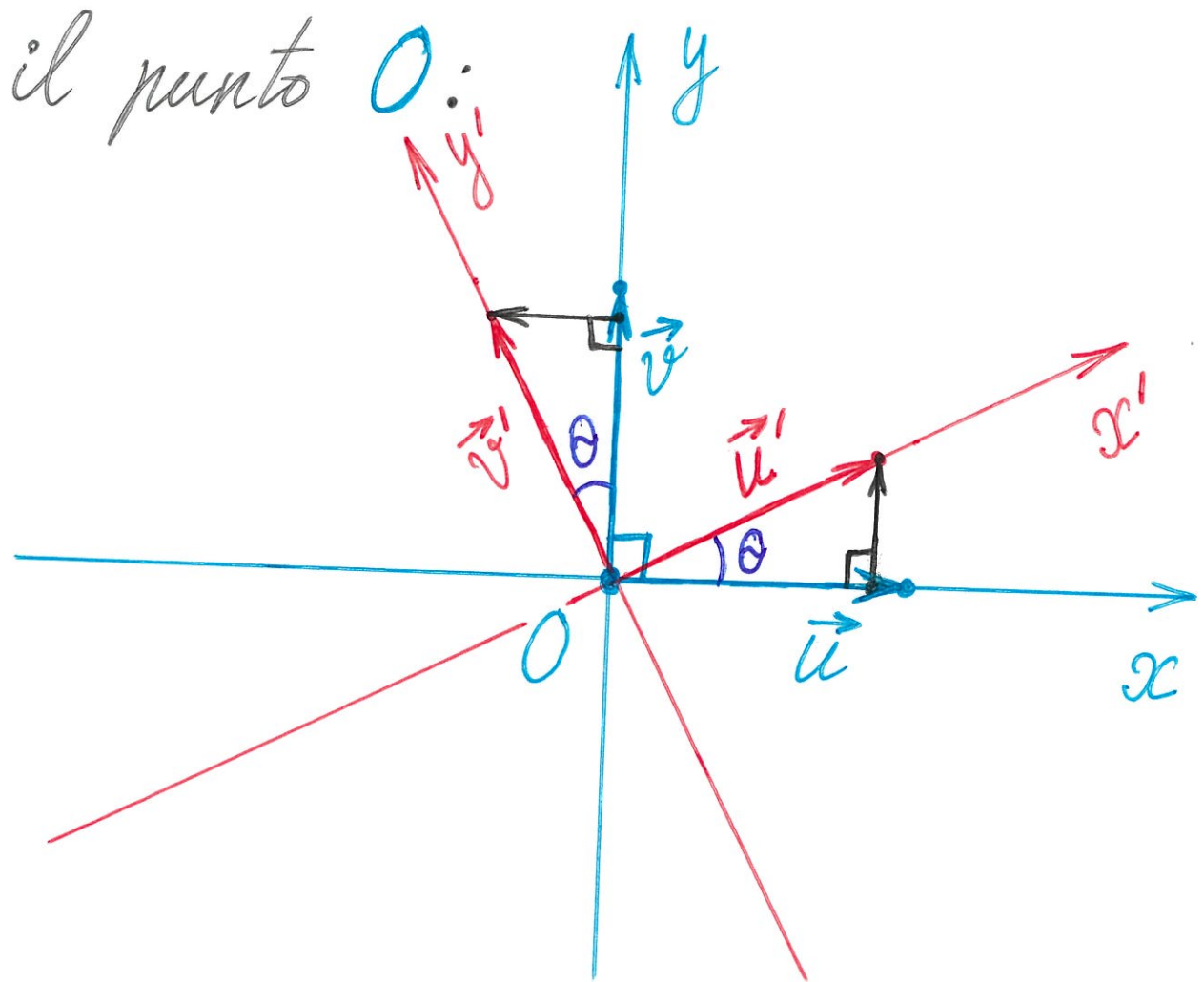
$$\text{e } |\vec{u}| = |\vec{v}| = 1.$$

(Vettori di lunghezza 1
si chiamano versori)

Sia $(O' := O, \vec{u}', \vec{v}')$ il sistema di riferimento ottenuto rotando $(O, \vec{u}, \vec{v})$ di angolo θ

in senso antiorario rispetto

(27)



Abbiamo:

$$\vec{u}' = \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{v}$$
$$\vec{v}' = -\sin \theta \vec{u} + \cos \theta \vec{v}$$

Quindi

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}$$

dove la matrice di passaggio

$$\text{è } S = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}.$$

Ne segue che

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} S^{-1} &= \frac{1}{\cos^2 \theta - (-\sin \theta) \sin \theta} \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Osservazione 1 S^{-1} si ottiene da S sostituendo $-\theta$ a posto di θ .

Osservazione 2 La matrice S'

(29)

coincide con la matrice
rappresentativa della mappa L
nell' Esempio 2 (rispetto alla base
canonica di $\mathbb{R}^2$) perché rotazione
del piano nel senso antiorario
(la mappa L dell' Esempio 2)

è equivalente alla
rotazione del sistema di riferi-
mento nel senso orario dello
stesso angolo

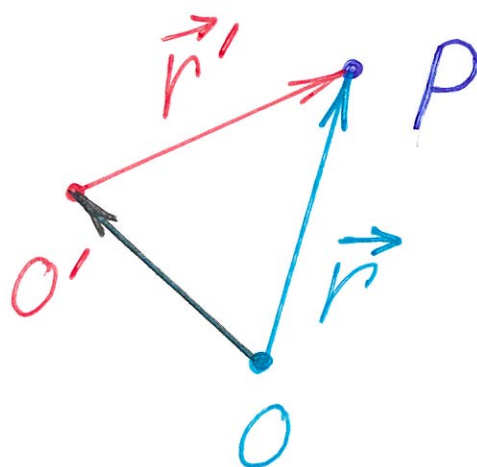
(passaggio da $(O, \vec{u}', \vec{v}')$
a $(O, \vec{u}, \vec{v})$).

2° Passaggio da $(O, \vec{u}, \vec{v})$
a $(O', \vec{u}', \vec{v}')$:

Caso generale $O \neq O'$

Notazione

$\vec{r}$ e $\vec{r}'$
 $\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \end{bmatrix}$



sono i vettori di posizione
e i vettori delle coordinate
di un punto generico P
rispetto ai sistemi di riferimento
 $(O, \vec{u}, \vec{v})$ e $(O', \vec{u}', \vec{v}')$.

Poi chiamiamo (x, y) e (x', y')

(31)

le coordinate di $\vec{r}'$

rispetto i due sistemi di riferimento: $(O, \vec{u}, \vec{v})$ e $(O', \vec{u}', \vec{v}')$.

Vogliamo esprimere (x_P, y_P)
come funzioni di (x'_P, y'_P) .

- Le coordinate di P risp. a $(O', \vec{u}', \vec{v}')$ coincidano con quelli di $\vec{r}'$:
 $x'_P = x', y'_P = y'$;
- Le coordinate di P risp. a $(O, \vec{u}, \vec{v})$ coincidano con quelli di $\vec{r}$.

Quindi, cosa dobbiamo fare
è

trovare le coordinate (x_p, y_p)
di $\vec{r}$ risp. a $(0, \vec{u}, \vec{v})$,

se sono date le coordinate
di $\vec{r}'$ risp. a $(0', \vec{u}', \vec{v}')$.

Gia conosciamo che

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} \quad (*)$$

dove (x, y) sono le coordinate
di $\vec{r}'$ (non di $\vec{r}$) risp. a
 $(0, \vec{u}, \vec{v})$.

Rimane esprimere le coordinate
di $\vec{r}$ come funzioni delle

coordinate di $\vec{r}'$ sempre
rispetto a $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

(33)

Abbiamo:

$$\vec{r}' = x \vec{u} + y \vec{v}, \quad (1)$$

$$\vec{r} = x_p \vec{u} + y_p \vec{v}, \quad (2)$$

$$\text{e poi } \vec{r} = \vec{OO'} + \vec{r}' \quad (*)$$

Chiamiamo $(x_{O'}, y_{O'})$ le coordina-
te di O' risp. a $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

$$\text{Allora } \vec{OO'} = x_{O'} \vec{u} + y_{O'} \vec{v}. \quad (3)$$

Sostituendo (1), (2), (3) in (*),
otteniamo

$$x_p \vec{u} + y_p \vec{v} =$$

$$= (x_{0'} \vec{u} + y_{0'} \vec{v}) + (x \vec{u} + y \vec{v}) \quad (34)$$

$$= (x_{0'} + x) \vec{u} + (y_{0'} + y) \vec{v}.$$

il vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ formano una base. Pertanto due combinazioni lineari di $\vec{u}$ e $\vec{v}$ rappresentano lo stesso vettori se e solo se i corrispondenti coefficienti coincidano:

$$\begin{cases} x_p = x_{0'} + x, \\ y_p = y_{0'} + y. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{0'} \\ y_{0'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Usando $(*)$, finalmente possiamo 35
scrivere

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{o'} \\ y_{o'} \end{bmatrix} + S \begin{bmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{bmatrix}.$$

Moltiplicando ambo i lati per S^{-1} ,
abbiamo $S^{-1} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} =$

$$= S^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_{o'} \\ y_{o'} \end{bmatrix} + S \begin{bmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{bmatrix} \right) =$$

$$= S^{-1} \begin{bmatrix} x_{o'} \\ y_{o'} \end{bmatrix} + S^{-1} \left(S \begin{bmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{bmatrix} \right)$$

$$= S^{-1} \begin{bmatrix} x_{o'} \\ y_{o'} \end{bmatrix} + (S^{-1} S) \begin{bmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{bmatrix}$$

$$= S^{-1} \begin{bmatrix} x_{o'} \\ y_{o'} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{bmatrix}$$

e quindi

$$\begin{bmatrix} x_{p'} \\ y_{p'} \end{bmatrix} = S^{-1} \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} - S^{-1} \begin{bmatrix} x_{o'} \\ y_{o'} \end{bmatrix}$$

$$= S^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{o'} \\ y_{o'} \end{bmatrix} \right)$$

Osservazione Nelle formule di passaggio per le coordinate di punti, si presenta la stessa matrice di passaggio S , come nelle formule di passaggio per vettori liberi, più la traslazione del vettore $\vec{OO'}$ (che esprime il cambio dell'origine).

Equazioni parametriche di rette.

L'argomento nella questa
parte è lo stesso sia per il
caso piatto che 3-dimensionale.

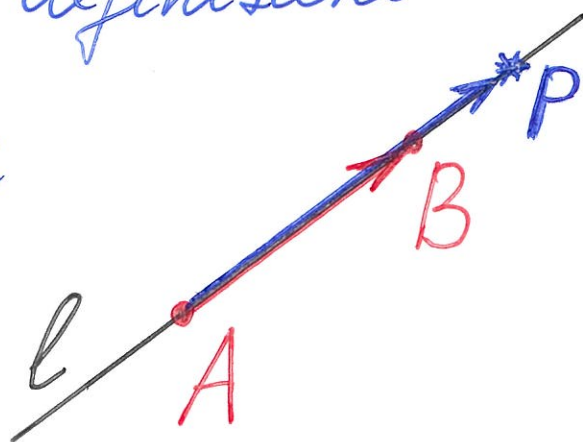
Consideriamo una retta ℓ .

Siano A e B due punti
distinti su ℓ .

Scegliamo un sistema di
riferimento $(A, \vec{u}, \vec{v})$

la cui origine coincide con A .

Ne segue dalla definizione
del prodotto di
un vettore



per uno scalare che P appartiene
alla retta l se e solo se
 $\vec{AP}$ è un multiplo di $\vec{AB}$,
cioè se e solo se il vettore
di posizione di P è di forma

$$\vec{r} = t\vec{a}, t \in \mathbb{R},$$

$$\vec{a} := \vec{AB}.$$

la relazione si chiama l'equazione

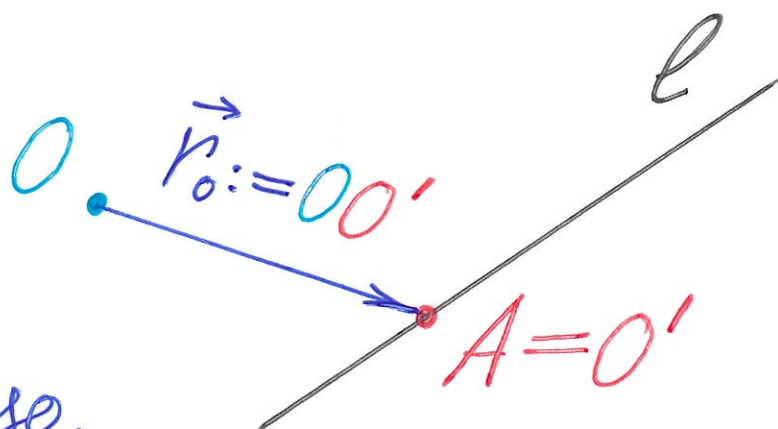
parametrica della retta l

(39)

(passante per l'origine).

Come passare al caso generale
in cui la retta non^{necessariamente} passa
per l'origine?

Consideriamo un altro sistema
di riferimento con gli stessi
vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ma un'altra
scelta di origine O :



In questo caso,

la matrice di passaggio $S' = I$,

e la formula su pagina 35
mi da

$$\begin{bmatrix} x_p \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_A \\ y_A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x'_p \\ y'_p \end{bmatrix}$$

$$\text{oppure } \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}' \\ = \vec{r}_0 + t\vec{a}.$$

Abbiamo arrivato all'equazione
parametrica della retta
per punti A e B:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{a}, t \in \mathbb{R}$$

con $\vec{r}_0 := \vec{OA}$, $\vec{a} := \vec{AB}$.

Consideriamo un esempio, che illustra come un problema può semplificarsi moltissima con una opportuna scelta di sistema di riferimento. Al momento, non discutiamo come trovare un sistema di riferimento che passa meglio un problema dato. Questo dipende dalla natura del problema. Ci concentriamo su come applicare le formule di passaggio se il nuovo sistema di riferimento utile per risolvere il problema è già determinato.

Esempio

(42)

Si consideri una curva Γ nel piano descritta da equazione

$$13x^2 - 10xy + 13y^2 - 24x - 24y = 0, (*)$$

dove (x, y) sono le coordinate rispetto ad un sistema cartesiano.

Si scrive l'equazione di Γ nelle coordinate (x', y') rispetto al sistema di riferimento (O', A', B') con i punti O', A', B' dati da sue coordinate rispetto al sistema cartesiano:

$$O'(x_0, y_0), x_0 = y_0 = \frac{3}{2};$$

$$A'(3, 3); B'\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right).$$

Usando il fatto che la matrice S' nella formula di passaggio:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = S' \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix},$$

ammette la rappresentazione

$$S' = \text{diag}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) R_{\frac{\pi}{4}}$$

$$\text{dove } R_{\theta} := \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix},$$

si classifica la curva Γ .
(Tsss... Γ is an ellipse)

Soluzione

44

Scriviamo la matrice S' :

$\vec{O'A'}$ e $\vec{O'B'}$ rispetto alla base vecchia hanno coordinate:

$$\begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} \text{ e } \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow S' = \begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Quindi, $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = S' \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} =$
le coordinate di O'

$$= \begin{bmatrix} 3/2 & -1 \\ 3/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3/2 x' - y' + 3/2 \\ 3/2 x' + y' + 3/2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$x = \frac{3}{2}x' - y' + \frac{3}{2}, \quad (a)$$

$$y = \frac{3}{2}x' + y' + \frac{3}{2}. \quad (b)$$

Sostituiamo queste uguaglianze nell'equazione di Γ :

$$0 = 13x^2 + 13y^2 - 10xy - 24x - 24y$$

$$= 13(x^2 + y^2) - 10xy - 24(x + y)$$

$$= 13 \left(2 \left(\frac{3}{2}x' + \frac{3}{2} \right)^2 + 2y'^2 \right)$$

$$- 10 \left(\left(\frac{3}{2}x' + \frac{3}{2} \right)^2 - y'^2 \right)$$

$$- 24 \cdot 2 \left(\frac{3}{2}x' + \frac{3}{2} \right) =$$

(46)

$$= 16 \left(\frac{3}{2}x' + \frac{3}{2} \right)^2 + 36y'^2 - 72(x'+1)$$

$$= 36(x'+1)^2 + 36y'^2 - 72(x'+1)$$

$$= 36x'^2 + 72x' + 36 + 36y'^2 - 72x' - 72$$

$$= 36(x'^2 + y'^2 - 1)$$

Pertanto nelle coordinate (x', y')
rispetto al sistema di riferimento
 (O', A', B') la curva Γ è descritta
dall'equazione

$$x'^2 + y'^2 = 1$$

Per classificare quale curva

(47)

Γ è, usiamo il seguente principio:

Passaggio da un sistema di riferimento nel piano (nello spazio) ad un altro sistema di riferimento è equivalente alla trasformazione di $\mathbb{R}^2$ (rispett. $\mathbb{R}^3$) tramite la mappa T che trasforma le coordinate rispetto al sistema nuovo nelle coordinate dello stesso punto rispetto al sistema vecchio.

Nel nostro caso,

$$T(x', y') = S' \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3/2 \\ 3/2 \end{bmatrix}.$$

Controlliamo che il suggerimento

$$S' = R_{\frac{\pi}{4}} \text{diag}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right)$$

non è un truffa:

$$R_{\frac{\pi}{4}} \text{diag}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right) =$$

$$= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3\sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ la prima colonna si moltiplica
per $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, la seconda - per $\sqrt{2}$ $\Rightarrow$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & -1 \\ \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix} = S.$$

Va bene, ma per che cosa utile?

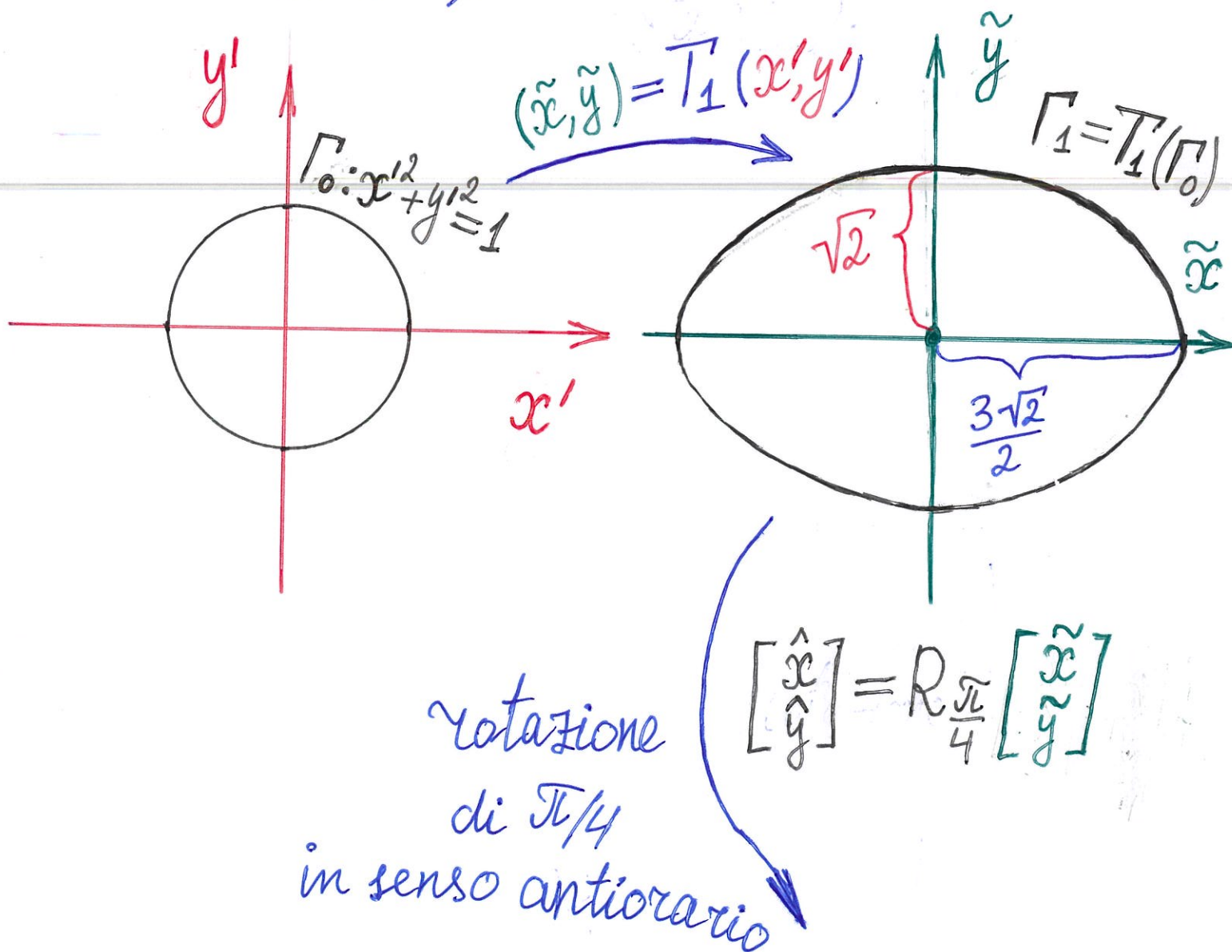
È utile perché permette rappresentare la mappa T come la mappa composta di tre mappe più semplici:

$$T = T_3 \circ T_2 \circ T_1,$$

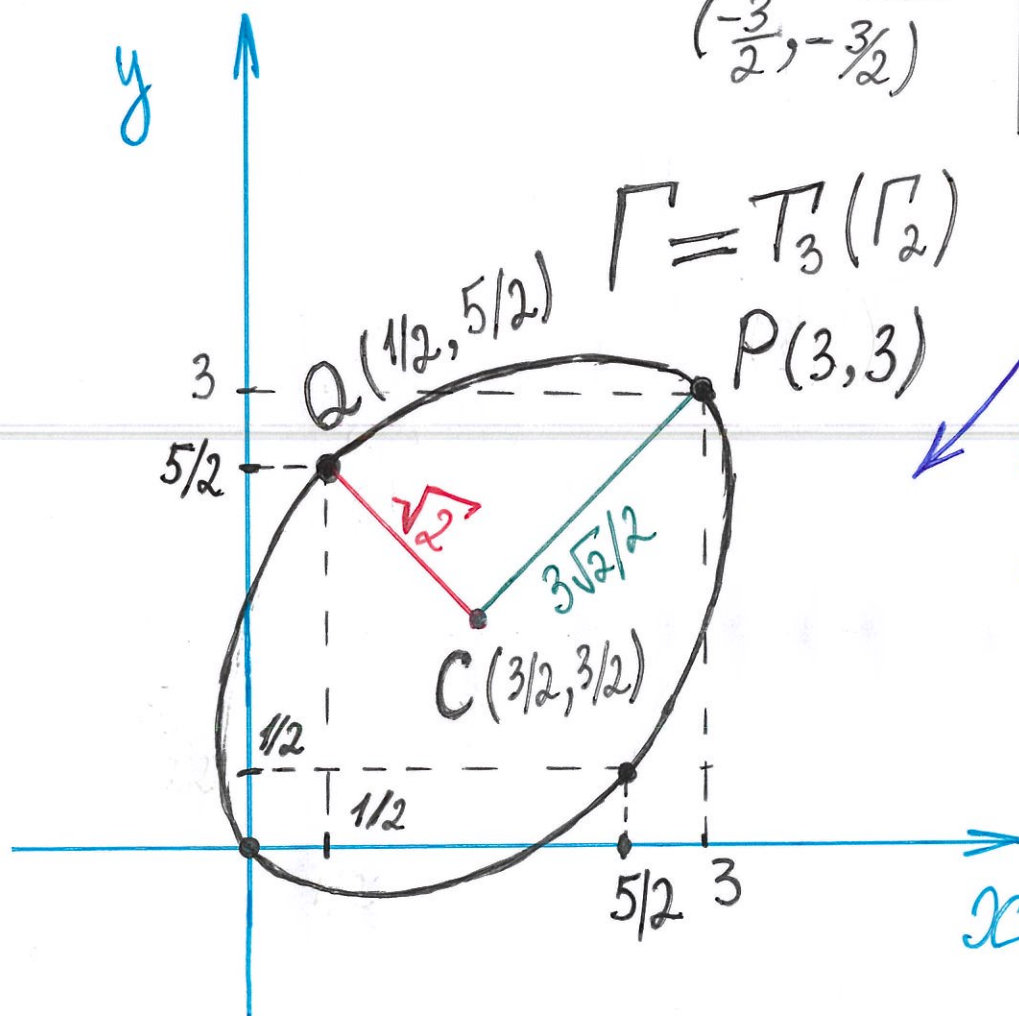
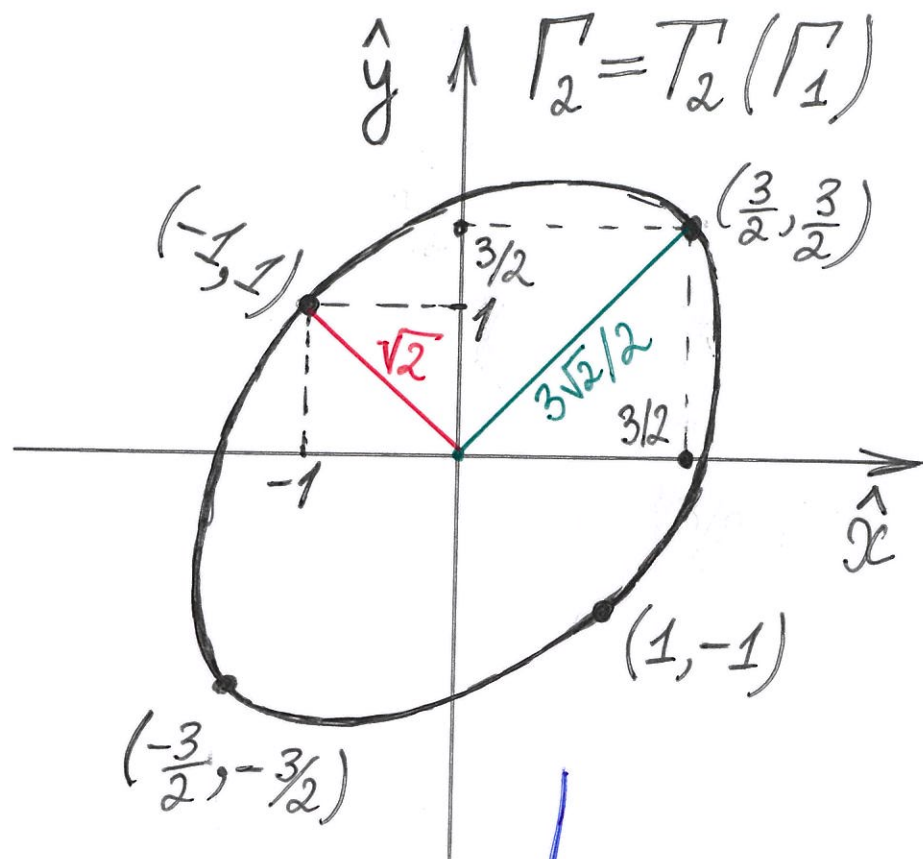
dove:

- T_1 è la mappa lineare rappresentata dalla matrice $\text{diag}(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2})$;

- T_2 è la mappa lineare rappresentata da $R_{\pi/4}$, cioè la rotazione del piano (identificato con $\mathbb{R}^2$);
- T_3 è la traslazione del vettore $(3/2, 3/2)$.



(51)



$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = T_3(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Conclusione

Γ è l'ellisse di centro $C(3/2, 3/2)$
e i semiassi CP , $P(3, 3)$,
e CQ , $Q(1/2, 5/2)$.

Osservazione Come "prodotto secondario" possiamo scrivere anche equazioni parametriche di Γ :

È facile scriverle nelle coordinate (x', y') : l'equazione

$x'^2 + y'^2 = 1$ descrive la circonferenza unitaria centrata nell'origine.

Le equazioni parametriche
di tale circonferenza sono

$$\begin{cases} x' = \cos t, \\ y' = \sin t, \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

Passando alle coordinate (x, y)
mediante le formule (a) e (b),
pagina 45,

otteniamo:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} \cos t - \sin t + \frac{3}{2}, \\ y = \frac{3}{2} \cos t + \sin t + \frac{3}{2}, \\ t \in [0, 2\pi]. \end{cases}$$

Equazioni parametriche di piani

Consideriamo un piano Π
nello spazio.

Fissiamo tre punti del piano Π ,
 O_Π , A , e B ,

non appartenenti alla stessa retta.

Allora la terna (O_Π, A, B)
definisce un sistema di riferimento
nel piano Π .

Pertanto per ogni punto $P \in \Pi$,

$$\vec{O_\Pi P} = t \vec{u} + s \vec{v} \quad (*)$$

con $\vec{u} := \overrightarrow{O_{\Pi} A}$

e $\vec{v} := \overrightarrow{O_{\Pi} B}$,

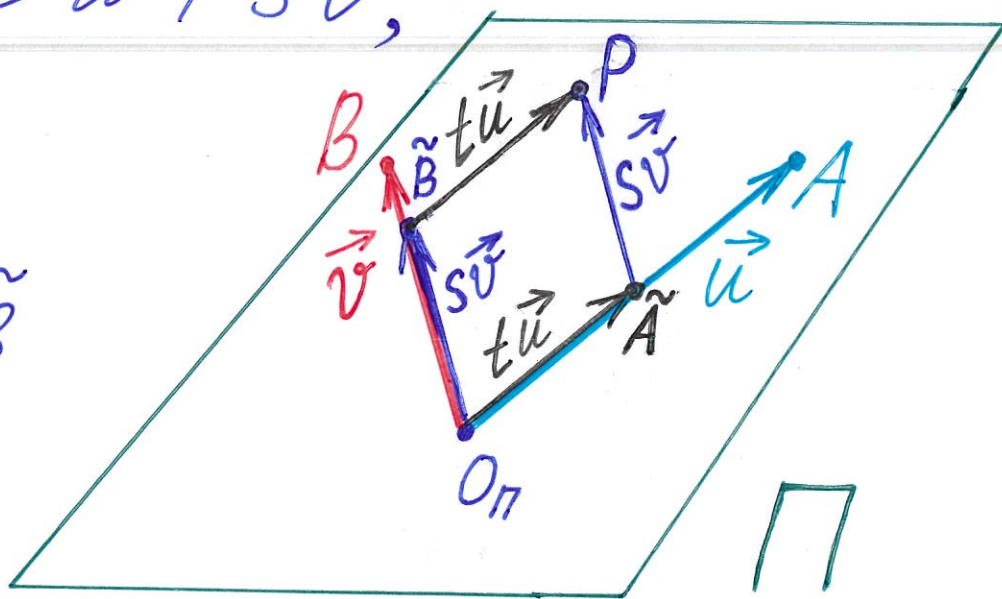
per opportuni scalari $t, s \in \mathbb{R}$.

Vice versa, se P è un punto dello spazio tale che $\exists s, t \in \mathbb{R}$:

$$\overrightarrow{O_{\Pi} P} = t\vec{u} + s\vec{v},$$

allora:

- punti $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$
(guardare
il disegno)



appartengono le rette $O_{\Pi} A$ e $O_{\Pi} B$ rispettivamente, e pertanto

$$\tilde{A}, \tilde{B} \in \Pi;$$

(56)

- $O_\Pi, \tilde{A}, \tilde{B},$ e P sono vertici di un parallelogramma.

Ogni parallelogramma è una figura piana. Quindi, i quattro punti appartengono lo stesso piano, cioè $P \in \Pi$.

Insomma,

$$P \in \Pi \iff \overrightarrow{O_\Pi P} = t\vec{u} + s\vec{v} \quad (*)$$

per opportuni $t, s \in \mathbb{R}$.

Se l'origine del sistema di riferimento O fissato nello spazio coincide con O_Π , allora la formula (*) produce immediatamente l'equazione parametrica del piano Π :

$$\vec{r} := \vec{OP} = \vec{O_\Pi P} = t\vec{u} + s\vec{v},$$

$t, s \in \mathbb{R}.$

In caso generale $O_\Pi \neq O$,
abbiamo in vece

$$\begin{aligned}\vec{r} = \vec{OP} &= \vec{OO_\Pi} + \vec{O_\Pi P} = \\ &= \vec{r}_0 + \vec{O_\Pi P}\end{aligned}$$

con $\vec{r}_0 := \vec{OO_n}$, e quindi

(58)

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u} + s\vec{v}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Ecco la nostra equazione
parametrica del piano Π .

Esempio

Consideriamo l'equazione

lineare $x + 2y - 3z = 4$ (3)

Considerando (3) un sistema
lineare composta da una equazione,
possiamo identificare x come

un variabile dipendente,

mentre y e z come variabili libere: $y = t, z = s$.

Allora, l'insieme delle soluzioni coincide con

$$\{(4 - 2t + 3s, t, s) \in \mathbb{R}^3 : t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{ \underline{p}_0 + t \underline{u} + s \underline{v} : t, s \in \mathbb{R} \}$$

$$\text{con } \underline{p}_0 := \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\underline{u} := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ e } \underline{v} := \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(il teorema di Rouché-Capelli!!!)

(60)

Quindi, l'insieme delle soluzioni dell'equazione (3) è il piano in $\mathbb{R}^3$ passante per i punti $O_\pi(4,0,0)$,

$A(2,1,0)$ e $B(7,0,1)$.

$$(\underline{u} = \overrightarrow{O_\pi A}, \underline{v} = \overrightarrow{O_\pi B})$$

L'equazione (3) è un'equazione cartesiana di questo piano.

Osservazione Come abbiamo

visto, l'equazione parametrica nella forma vettoriale:

$$\underline{r} = \underline{r}_0 + t\underline{u} + s\underline{v},$$

si può scrivere nelle coordinate:

$$\begin{cases} x = 4 - 2t + 3t, \\ y = t, \\ z = s, \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R}. \quad \begin{array}{l} \text{(mappa} \\ \text{biettiva tra} \\ \mathbb{R}^2 \text{ e il} \\ \text{nostro piano)} \end{array}$$

Altro esempio Applichiamo
l'argomento dell'esempio
precedente al sistema di
due equazioni

$$\begin{cases} x + y + z = 3, \\ x - y + 2z = 2. \end{cases} \quad (+)$$

(62)

Applicando MEG, arriviamo
al sistema equivalente a scala

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ -2y+z=-1. \end{cases}$$

x e y sono dipendenti,

z è libera. Con sostituzione
retrograda, otteniamo:

$$\begin{cases} z=t, & y = \frac{1+z}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t, \\ x = 3 - y - z = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}t. \end{cases} \quad (1)$$

oppure $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underline{r}_0 + t \underline{a}, \quad (2)$

$t \in \mathbb{R},$

con $\underline{r}_0 := \begin{bmatrix} 5/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \underline{a} := \begin{bmatrix} -3/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Conclusione: sistema (+)

descrive una retta in $\mathbb{R}^3$

la cui equazione parametrica

è l'equazione (2) — forma
vettoriale.

[oppure, nelle coordinate — eq. (1)]

L'equazione parametrica definisce

una mappa biettiva tra $\mathbb{R}$ e

la nostra retta in $\mathbb{R}^3$.

Il sistema (+) è il sistema

di equazioni cartesiane della

retta considerata.

Nei due esempi precedenti
abbiamo visto come passare
dalle equazioni cartesiane

(di una retta o di un piano)
alle equazioni parametriche.

Adesso consideriamo il
problema contrario:

date equazioni parametriche,
scrivere le equazioni cartesiane.

Senza perdere generalità,

possiamo assumere che $O \in \mathbb{R}^3$
appartiene alla nostra retta

(rispettivamente, al nostro piano) ⁽⁶⁵⁾

In tal caso, il nostro problema è un caso particolare di un problema più generale:

dati vettori $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k \in \mathbb{R}^n$,
trovare una matrice A tale che
 $\ker(A) = \text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_k\}.$

Metodo: troviamo vettori $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$
tali che $\underline{u}$ è ortogonale ad
ogni vettore

$$\underline{v} \in \text{span}\{\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k\},$$

cioè $\underline{v}^T \underline{u} = 0$.

(66)

Fatto: basta controllare

che $\underline{u} \perp \underline{v}_j$

per ogni $j=1,2,\dots,k$.

Quindi, $\underline{u}$ è soluzione del

sistema $\underline{v}_j^T \underline{u} = 0, \quad (*)$
 $j=1,2,\dots,k$.

ha matrice dei coefficienti di (*)
è composta dai vettori $\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k$
scritti come righe.

Metodo (continuato) usando MEG

risolviamo il sistema (*)

e rappresentiamo l'insieme delle soluzioni come

$$\text{span} \{ \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_d \}.$$

- Allora $\text{span} \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \}$

coincide con l'insieme di

vettori $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ ortogonali

ad ogni $\underline{u} \in \text{span} \{ \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_d \}.$

- Pertanto, $\text{span} \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n \}$

è l'insieme delle soluzioni del sistema lineare

$$\underline{u}_i^T \underline{v} = 0, \quad i=1,2,\dots,d.$$

(68)

Quindi, la matrice cercata
(il cui nucleo coincide con
 $\text{span}\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \dots, \underline{v}_n\}$)
è la matrice dei coefficienti
dell'ultimo sistema,
cioè la matrice composta dai
vettori $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_d$
scritte come righe.

Esempio In $\mathbb{R}^3$ data una
retta di equazioni parametriche

(69)

$$\begin{cases} x = -1 + t, \\ y = 2t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Scrivere} \\ \text{le equazioni} \\ \text{cartesiane.} \end{array}$$

Soluzione Le equazioni parametriche nella forma vettoriale:

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \underline{v}_1$$

con $x_0 := -1$, $y_0 := 0$, $z_0 := 1$,

$$\text{e } \underline{v}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Cambiando la posizione dell'origine da $(0,0,0)$ a (x_0, y_0, z_0) , arriviamo all'equazione più

semplice:

(70)

$$\underline{x} = \pm \underline{v}_1,$$

cioè la nostra retta coincide
con $\text{span}\{\underline{v}_1\}$.

Usiamo la procedura descritta
sopra. Il sistema lineare
per vettori $\underline{u}$ ortogonali alla
nostra retta consiste in una
equazione: $\underline{v}_1^T \underline{u} = 0$,
oppure

$$1u_1 + 2u_2 + 3u_3 = 0.$$

La soluzione generale è

(71)

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} -2t - 3s \\ t \\ s \end{bmatrix} =$$

$$= t \underline{u}_1 + s \underline{u}_2$$

$$\text{con } \underline{u}_1 := \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \underline{u}_2 := \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Pertanto, } A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le equazioni cartesiane:

$$\begin{cases} -2x + y = 0, \\ -3x + z = 0. \end{cases}$$

NB: alla fine dobbiamo restituire

l'origine:

(72)

sostituiamo nei lati sinistri

$$x = \underline{x_0 = -1}, y = y_0 = 0, z = z_0 = 1:$$

$$-2x_0 + y_0 = +2,$$

$$\underline{-3x_0 + z_0 = -2.4}$$

la risposta finale:

$$\begin{cases} -2x + y = +2, \\ -3x + z = -2.4 \end{cases}$$