

GAL'24

Fatica 2 bis

(addendum alla Lezione 2)

Eliminazione di
Gauß - Jordan.

Calcolo della matrice
inversa.

ALG: Capitolo 3, § 6

Non-unicità

②

della forma ridotta.

Esempio 1

Risolvere il sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 2 \\ x_3 - 3x_4 = -2 \end{cases}$$

Soluzione

Scriviamo la matrice completa del sistema e riduciamola a scala usando la variante standard del MEG:

(3)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - \frac{1}{2} R_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 + 2 R_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{2} & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{-1/2} & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] =: U$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

variabili libere : $x_2 = t, x_4 = s,$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2t + x_3 + s = 2, \\ -1/2 x_3 + 3/2 s = 1, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$x_1 = 2 + t - 2s, \quad x_3 = -2 + 3s.$$

C'è una piccola variazione
della soluzione precedente:

④

Soluzione bis. Per facilitare i
calcoli, conviene scambiare le prime
due equazioni (e quindi le prime
due righe):

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - 2R_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{cccc|c} \textcircled{1} & -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] =: U_0$$

$x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4$

$$x_2 = t, \quad x_4 = s,$$

$$\begin{cases} x_1 - t + 2s = 2, & \Leftrightarrow x_1 = 2 + t - 2s, \\ x_3 - 3s = -2, & \Leftrightarrow x_3 = -2 + 3s. \end{cases}$$

NB: la sostituzione retrograda non serve!

5

Def

Due matrici si chiamano
equivalenti per righe
se una di esse si può ottenere
dall'altra applicando una
successione finita di operazioni
elementari su righe (scambio
di due righe, addizione o sottrazione
di un multiplo di una riga da un'altra
riga, moltiplicazione di una riga
per uno scalare non-nullo).

Osservazione Come illustra
Esempio 1, possono esistere molte
matrici a scala equivalenti per

righe ad una matrice data.

⑥

Comunque tra i loro esiste una unica matrice che verifica una condizione aggiuntiva:

Proposizione Sia A una matrice qualsiasi. Tra le matrici a scala U equivalenti per righe alla matrice A si trova una unica matrice U_0 che, in aggiunta, soddisfa la seguente condizione: in ogni riga non-nulla di U_0 , il primo elemento non-nullo:

- (i) vale 1;
- (ii) tutti gli elementi nella stessa colonna sopra questo elemento sono nulli.

Def la matrice U_0 nella proposizione precedente si chiama la (matrice) totalmente ridotta di A .

Nell' Esempio 1:

- U è una delle (a scala) ridotte della matrice completa del sistema;
- U_0 è l'unica totalmente ridotta della matrice completa del sistema.

Eliminazione di Gauss-Jordan
[MEG-J] è un algoritmo
di trovare la forma totalmente
ridotta di una matrice data.

NB MEG-7 è utile anche ⑧
per il calcolo dell'inversa
(di una matrice quadrata):

Proposizione

Una matrice quadrata A
è invertibile se e solo se
la matrice totalmente ridotta
di $[A | I]$
è di forma $[I | B]$.
In tal caso, $A^{-1} = B$.

Esempio 2 Stabilire se ⑨

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ è invertibile.}$$

Se sì, trovare la sua inversa.

Soluzione MEG-J ha 3 parti.

Parte 1: MEG

$$[A | I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

$$\xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - R_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right]$$

Parte 2 : normalizzazione

$$R_3 \rightarrow -R_3 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{1} & -1 & 1 & -1 \end{array} \right] \rightarrow$$

(questi elementi devono = 1)

Parte 3 : seconda eliminazione

(nullifichiamo elementi sopra i pivot)

$$\begin{array}{l} R_1 \rightarrow R_1 + R_3 \\ R_2 \rightarrow R_2 - R_3 \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$$R_1 \rightarrow R_1 - 2R_2 \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right]$$

$\underbrace{\quad\quad\quad}_I \quad \underbrace{\quad\quad\quad}_{A^{-1}}$

La risposta: A è invertibile

(11)

e la sua inversa è $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

Esercizio: controllare la correttezza della risposta moltiplicando la matrice di sopra per A .

Esempio 3 Stabilire se la matrice

$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ è invertibile.

In caso affermativo, trovare A^{-1} .

Soluzione

Applichiamo MEG-J ⁽¹²⁾

alla matrice $[A|I] =$

MEG

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} \textcircled{1} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \textcircled{1} & 4 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 - R_1}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{4} & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \textcircled{2} & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{R_3 \rightarrow R_3 - \frac{1}{2}R_2}$$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array} \right]$$

una ridotta di A con solo

2 righe di 3 non nulle $\Rightarrow$

$\text{rango}(A) = 2 < \text{l'ordine di } A = 3$

(13)

$\Rightarrow A$ è non-invertibile
(singolare).

Osservazione: per concludere che una matrice quadrata data è singolare (o, invece, invertibile) basta ridurla a scala. La riduzione completa serve, nel caso se A è invertibile, se vogliamo trovare A^{-1} .