oss: Confronto per limiti infiniti

* $a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \xrightarrow{n \to +\infty} +\infty \implies b_n \xrightarrow{n \to \infty} +\infty$

* $a_n \le b_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ e $b_n \xrightarrow{n \to +\infty} -\infty \implies a_n \xrightarrow{n \to +\infty} -\infty$

DEF: $\{a_n\}$ si dice INFINITESIMA se $a_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$

Lemma: $a_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0 \iff |a_n| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

TEOREMA: Siano $\{a_n\}$ una successione limitata e $\{b_n\}$ una successione infinitesima. Allora

$$a_n b_n \xrightarrow{n \to +\infty} 0$$

dim: poiché b_n è infinitesima, per il lemma anche $|b_n| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$$0 \le |a_n b_n| = \underbrace{|a_n|}_{\text{limitata}} |b_n| \le M |b_n| \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$< M \ \forall n \in \mathbb{N}$

per il teo dei due carabinieri $|a_n b_n| \xrightarrow{n \to \infty} 0$

e per il lemma precedente anche $a_n b_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Esempi

* $a_n = \frac{\sin(n)}{n} = \sin(n) \frac{1}{n}$
  - osservo che $|\sin(n)| \le 1 \ \forall n \in \mathbb{N}$ (M) quindi $\sin(n)$ è limitata
  - osservo che $\frac{1}{n}$ è infinitesima

  perciò per il teorema precedente $a_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$

* $a_n = n \qquad b_n = \frac{1}{n} \qquad a_n b_n = 1 \xrightarrow{n \to \infty} 1$

  limitatezza è necessaria $\Leftarrow$ NON è limitata; a_n NON è limitata, b_n è infinitesima

TEOREMA Ogni successione monotona ammette limite

Inoltre $a_n \xrightarrow{n\to\infty} \sup\{a_n\}$ se $\{a_n\}\nearrow$

$a_n \xrightarrow{n\to\infty} \inf\{a_n\}$ se $\{a_n\}\searrow$

dim:

- caso in cui $\{a_n\}\nearrow$ e limitata superiormente

$$\lambda := \sup\{a_n\} \in \mathbb{R}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $a_\nu > \lambda - \varepsilon$

$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

allora in particolare, $\forall n > \nu$

$$\lambda - \varepsilon < a_\nu \leq a_n < \lambda + \varepsilon$$

ho scritto

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $\lambda - \varepsilon < a_n < \lambda + \varepsilon \quad \forall n > \nu$

$\Leftrightarrow |a_n - \lambda| < \varepsilon$

DEF $\Leftrightarrow a_n \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$

- caso in cui $\{a_n\}\nearrow$ e illimitata superiormente

$\forall M > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $a_\nu > M$

$a_{n+1} \geq a_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\forall M > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n \geq a_\nu > M \quad \forall n > \nu$

DEF $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ □

Il Numero di Nepero

Consideriamo la successione $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

- è crescente
- è limitata superiormente

} per il teorema ammette limite e il suo limite è $\sup\{a_n\}$

$$e := \lim_{n\to\infty} a_n$$

$e \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$; $e = 2{,}718\ldots$

LIMITI NOTEVOLI

(a)

$$a^n \xrightarrow{n\to+\infty} \begin{cases} +\infty & a>1 \\ 1 & a=1 \\ 0 & -1<a<1 \\ \nexists & a\le -1 \end{cases}$$

dim * $a>1$ uso disug. di Bernoulli: $(1+x)^n \ge 1+nx \quad \forall x>-1,\ n\in\mathbb{N}$

pongo $x = a-1$ allora

$$a^n = (1+a-1)^n = (1+x)^n \ge 1+nx = \underbrace{1+n(a-1)}_{\to+\infty \text{ per } n\to\infty}$$

dunque per la proprietà di confronto $a^n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$

* $a=1$, $1^n = 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1$

* $-1<a<1$, $a\neq 0$ $\quad |a^n| = |a|^n = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{|a|}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ per il primo penuto

$\left(\frac{1}{|a|}\right)^n \to 1$ perché $-1<a<1$ $(|a|<1)$

* $a\le -1$

considero le due sottosucc.

$k\in\mathbb{N}$

$$a^{2k} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} 1 & \text{se } a=-1 \\ +\infty & \text{se } a<-1 \end{cases}$$

$$a^{2k+1} \xrightarrow{k\to\infty} \begin{cases} -1 & \text{se } a=-1 \\ -\infty & \text{se } a<-1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ il limite di a^n non esiste se $a\le -1$

(b) Sia $a>0$, $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

dim: - considero il caso $a\ge 1$ e definisco $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$

- $b_n \ge 0$ (perché $a\ge 1$)
- per Bernoulli $(1+b_n)^n \ge 1+nb_n$ ($x>-1$)

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n \ge 1+nb_n$$

$$a \ge 1+nb_n$$

$$0 \le b_n \le \frac{a-1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

per il teo dei due carabinieri $b_n \to 0$ $n\to+\infty$

allora $\sqrt[n]{a} \xrightarrow{n\to\infty} 1$

se $A_n \le C_n \le B_n$, $A_n \to \ell$, $B_n \to \ell$ allora $C_n \to \ell$

$A_n \equiv 0$, $B_n = \frac{a-1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $C_n \equiv b_n$

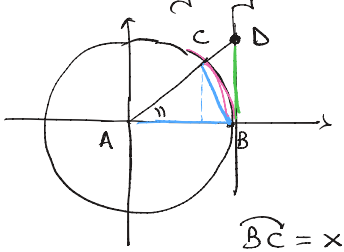
- considero $0 < a \leq 1$

allora $\frac{1}{a} > 1$ e $\sqrt[m]{a^1} = \frac{1}{\sqrt[m]{\frac{1}{a^1}}} \xrightarrow{m\to\infty} 1$ ($\sqrt[m]{\frac{1}{a^1}} \xrightarrow{m\to\infty} 1$, $\sqrt[m]{\frac{1}{a^1}} > 1$) per algebra dei limiti

oss: $b \in \mathbb{R}$ $\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{m^b} = 1$

(c) Sia $a_m \xrightarrow{m\to\infty} \pm\infty$ allora $\left(1 + \frac{\alpha}{a_m}\right)^{a_m} \xrightarrow{m\to\infty} e^{\alpha}$ $\alpha \in \mathbb{R}$

oss: vale la disuguaglianza: $\boxed{\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1}$ $|x| \leq \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$



$\overset{\frown}{BC} = x$

Area $(\overset{\triangle}{ABC}) = \frac{\sin x}{2}$

Area $(\overset{\frown}{ACB}) = \frac{x}{2}$

Area $(\overset{\triangle}{ABD}) = \frac{\tan x}{2}$

$\overset{\triangle}{ABC} \subset \overset{\frown}{ACB} \subset \overset{\triangle}{ABD}$

$\Rightarrow \frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\tan x}{2}$

considero solo $x \in (0, \frac{\pi}{2}]$

poiché $x \leq \frac{\pi}{2}$, $x \neq 0$ posso molt. $\frac{2}{\sin x} > 0$

$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$ tutto positivo, posso prendere i reciproci

$\iff \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$

osservo che $\cos x$ è pari, $\sin x$ e x son fun dispari quindi il rapporto è pari perciò la dis. vale anche in $[-\frac{\pi}{2}, 0)$

(d) Sia $a_m \xrightarrow{m\to\infty} 0$

$*_1$ $\lim_{m\to\infty} \sin(a_m) = 0$

dim: $-1 \leq \cos a_m < \frac{\sin a_m}{a_m} < 1$

$\left|\frac{\sin a_m}{a_m}\right| < 1$

$0 \leq |\sin a_m| < |a_m| \xrightarrow{m\to\infty} 0$

allora per i due carab. $|\sin a_m| \xrightarrow{m\to\infty} 0$ e per uno dei teoremi visti oggi anche $\sin a_m \xrightarrow{} 0$ $m \to \infty$

$*_2 \lim_{n\to\infty} \cos(a_n) = 1$

definitivamente posso dire che $\cos(a_n) > 0$ poiché $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$

è sempre vero $\cos(a_n) \le 1$

$$0 < \cos(a_n) \le 1 \Rightarrow 1 - \cos(a_n) \ge 0$$

- $0 \le [1-\cos(a_n)]\,\dfrac{[1+\cos(a_n)]}{1+\cos(a_n)} = \dfrac{1-\cos^2(a_n)}{1+\cos(a_n)} = \sin^2(a_n) < \sin^2(a_n)$

  $\dfrac{1+\cos(a_n)}{1+\cos(a_n)} > 1$

- $0 \le 1-\cos(a_n) < \sin^2(a_n)$

- $\lim_{n\to+\infty} \sin^2(a_n) = \lim_{n\to\infty} \sin(a_n)\cdot\sin(a_n) = \lim_{n\to\infty}\sin(a_n)\cdot\lim_{n\to\infty}\sin(a_n) = 0$

  (algebra dei limiti)

- per il teo dei due carabinieri

$$0 \le 1-\cos(a_n) < \sin(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\downarrow n\to+\infty \quad 0$$

dunque $\cos(a_n) \xrightarrow{n\to\infty} 1$

$*_3 \lim_{n\to\infty} \dfrac{\sin(a_n)}{a_n} = 1$

$$\cos(a_n) < \frac{\sin(a_n)}{a_n} < 1$$

$$\downarrow n\to\infty \quad 1$$

per il teo dei due carab. ho la tesi

$*_4 \lim_{n\to\infty} \dfrac{1-\cos a_n}{a_n^2} = \dfrac{1}{2}$

$$\frac{1-\cos a_n}{a_n^2}\,\frac{1+\cos a_n}{1+\cos a_n} = \frac{1-\cos^2 a_n}{a_n^2(1+\cos a_n)} = \frac{\sin^2 a_n}{a_n^2}\,\frac{1}{1+\cos a_n}$$

$$= \left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right)^2 \frac{1}{1+\cos a_n}$$

$\left(\frac{\sin a_n}{a_n}\right)^2 \to 1$ per $n\to\infty$; $\frac{1}{1+\cos a_n} \to 2$

$$\downarrow n\to\infty$$

$$\frac{1}{2}$$

(algebra dei limiti + limiti notevoli precedenti)

(e) Sia $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$, $a_n \neq 0$

$*_1$ $\lim_{n\to\infty} (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = e$

dimostrazione immediata utilizz. il limite notevole al punto (c)

$b_n := \frac{1}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$ $\quad (1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} = \left(1+\frac{1}{b_n}\right)^{b_n} \xrightarrow{n\to\infty} e \quad (\alpha = 1)$

$*_2$ $\lim_{n\to+\infty} \frac{\log(1+a_n)}{a_n} = 1$

dim: $\frac{\log(1+a_n)}{a_n} = \frac{1}{a_n}\cdot\log(1+a_n) = \log(1+a_n)^{\frac{1}{a_n}} \xrightarrow{n\to+\infty} \log(e) = 1$

$*_3$ $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{a_n}-1}{a_n} = 1$

dim $b_n := e^{a_n}-1 \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$1 \xleftarrow{n\to\infty} \frac{\log(1+b_n)}{b_n} = \frac{\log(1+e^{a_n}-1)}{e^{a_n}-1} = \frac{\log(e^{a_n})}{e^{a_n}-1} = \frac{a_n}{e^{a_n}-1}$

per il punto precedente

concludo anche: $\frac{e^{a_n}-1}{a_n} = \frac{1}{\frac{a_n}{e^{a_n}-1}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ ($\frac{a_n}{e^{a_n}-1} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$)

$*_4$ $\lim_{n\to\infty} \frac{(1+a_n)^\alpha - 1}{a_n} = \alpha \qquad \alpha \in \mathbb{R}$

(f) RAPPORTO TRA POLINOMI

$P(n) = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \dots + a_0$ $\quad a_0, \dots, a_k \in \mathbb{R}$, $a_k \neq 0$, il grado di $P(n)$ è k

$Q(n) = b_h n^h + b_{h-1} n^{h-1} + \dots + b_0$ $\quad b_0, \dots, b_h \in \mathbb{R}$, $b_h \neq 0$, il grado di $Q(n)$ è h

(esempio $P(n) = n^3 - 2n + 1$ ha grado $k=3$ $\quad a_3 = 1$; $a_2 = 0$; $a_1 = -2$; $a_0 = 1$)

voglio valutare $\lim_{n\to\infty} \frac{P(n)}{Q(n)}$

in generale se $k, h \geq 1$ produce una forma indeterminata del tipo $\pm\frac{\infty}{\pm\infty}$ (il segno dipende da a_k e b_h)

si può raccogliere il monomio di grado max al num e al den

$$\frac{n^k\left(a_k + a_{k-1}\frac{1}{n} + a_{k-2}\frac{1}{n^2} + \dots + a_0\frac{1}{n^k}\right)}{n^h\left(b_h + b_{h-1}\frac{1}{n} + b_{h-2}\frac{1}{n^2} + \dots + b_0\frac{1}{n^h}\right)} = \begin{cases} +\infty & k>h,\ \frac{a_k}{b_h}>0 \\ -\infty & k>h,\ \frac{a_k}{b_h}<0 \\ \frac{a_k}{b_h} & k=h \\ 0 & k<h \end{cases}$$

$= n^{k-h}$

Esempio: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^5+n^4-2n^2}{-2n^3-n^2-2n}$

$P(n) = n^5+n^4-2n^2$ $\quad k=5$ grado del polinomio

$a_5=1;\ a_4=1;\ a_3=0;\ a_2=-2;\ a_1=a_0=0$

$Q(n) = -2n^3-n^2-2n$ $\quad h=3$ grado del polinomio

$b_3=-2;\ b_2=-1;\ b_1=-2;\ b_0=0$

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{n^5\left(1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)}{n^3\left(-2-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)} = n^2\,\frac{\left(1+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^3}\right)}{\left(-2-\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)} \xrightarrow{n\to+\infty} -\infty$$

(numeratore $\to 1$, denominatore $\to -2$)

TEOREMA (CRITERIO DEL RAPPORTO)

Sia $a_n > 0$, definiamo $b_n := \dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ se $b_n \xrightarrow{n\to\infty} b < 1$

allora $\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = 0}$

(9) $*_1$ $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^b}{\alpha^n} = 0$ f.i. del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ $\quad \boxed{b>0,\ \alpha>1}$

dim: sia $a_n := \dfrac{n^b}{\alpha^n}$, allora $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^b}{\alpha^{n+1}} \cdot \dfrac{1}{\frac{n^b}{\alpha^n}}$

$$= \left(\frac{n+1}{n}\right)^b \frac{\alpha^n}{\alpha^{n+1}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^b \frac{1}{\alpha}$$

($\frac{n+1}{n} \to 1$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^b \to 1$ per $n\to\infty$)

quindi $b_n := \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow{n\to\infty} \dfrac{1}{\alpha} < 1$

allora per il criterio del rapporto a_n è infinitesima

$*_2$ $\lim_{n\to\infty} \frac{\alpha^n}{n!} = 0$ $\quad \boxed{\alpha > 1}$

dim: voglio usare criterio del rapporto: $a_n := \frac{\alpha^n}{n!}$

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\alpha^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{\frac{\alpha^n}{n!}} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{\alpha(n+1)} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 < 1$$

$(n+1)! = (n+1)\,n!$

concludo che $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ per il criterio del rapporto

$*_3$ $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$

dim: sia $a_n := \frac{n!}{n^n}$ allora

$$b_n := \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{1}{\frac{n!}{n^n}} = (n+1)\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{(n+1)\,n^n}{(n+1)^n (n+1)} =$$

$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{e} < 1$$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to\infty} e$

allora per il criterio del rapporto a_n è infinitesima

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log_a(n)}{n^b} = 0$ f.i. del tipo $\frac{\infty}{\infty}$ $\quad a > 1$, $b > 0$

dim $\quad 2^x \geq 2^{[x]} = (1+1)^{[x]} \geq 1 + [x] > x \quad \forall x > 0$

$2^x > x \quad \forall x > 0$

$\Rightarrow \log_a(x) < \log_a(2^x) = x \log_a 2$

allora scelgo $x = n^{b/2}$ e ottengo

$$\frac{b}{2}\log_a(n) = \log_a\left(n^{b/2}\right) < n^{b/2}\log_a 2$$

$$\Rightarrow \frac{\log_a n}{n^{b/2}} < \frac{2}{b}\log_a 2$$

torno alla mia successione

$$0 < \frac{\log_a n}{n^b} = \frac{\log_a n}{n^{b/2}\cdot n^{b/2}} < \frac{2}{b}\frac{\log_a 2}{n^{b/2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

perciò per il teo dei due carabinieri $\frac{\log_a n}{n^b} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ $\quad \square$