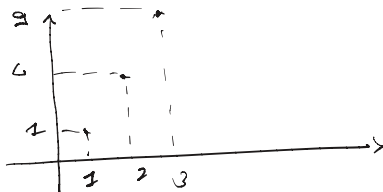


Esempio: $a_m = m^2$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} m^2 = +\infty$$



$$\forall M > 0 \quad a_m > M \iff m^2 > M \iff m > \sqrt{M}$$

~~$(m < -\sqrt{M})$~~ $m \geq 0$

posso prendere $m_H = [\sqrt{M}] + 1$

allora ottengo $a_m > M \quad \forall m > m_H$

DEF Una successione $\{a_m\}$ ha limite $-\infty$ (oppure tende a $-\infty$ oppure diverge negativamente) e si scrive

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m = -\infty \quad \left(a_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} -\infty \right)$$

$$\text{se } \boxed{\forall M > 0 \quad \exists r_H \in \mathbb{N} \text{ t.c. } \underline{a_m < -M} \quad \forall m > r_H}$$

$$\forall M > 0 \quad P_m = (m, a_m) \in \underline{S_H} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < -M\} \text{ definitivamente}$$

DEF: $\{a_m\}$ si dice REGOLARE se ammette limite (può essere convergente o divergente). Si dice invece IRREGOLARE se non ammette limite

Ese: $a_m = m^2$ è regolare $a_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty$ (limite infinito)

$b_m = \frac{1}{m}$ è regolare $b_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$ (finito)

$c_m = (-1)^m$ è irregolare

ALGEBRA DEI LIMITI

* SOMMA

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m$$

$$a \in \mathbb{R}$$

$$a$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} b_m$$

$$b \in \mathbb{R}$$

$$\pm \infty$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} (a_m + b_m)$$

$$a + b$$

$$\pm \infty$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

$+\infty - \infty$
forma
indeterminata

* PRODOTTO

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m$$

$$a$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m$$

$$b$$

$$\pm \infty$$

$$\pm \infty$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_m \cdot b_m)$$

$$a \cdot b$$

$$\pm \infty$$

$$\mp \infty$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

non posso dire
nulla per $a=0$ ←
 $0 \cdot \infty$ forma
indeterminata

* QUOZIENTE

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m$$

$$a$$

$$a$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a < 0 \end{cases}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m$$

$$b \neq 0$$

$$\pm \infty$$

$$\begin{cases} b > 0 \\ b < 0 \end{cases}$$

$$0$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{a_m}{b_m} \right) \quad b_m \neq 0 \text{ definitivamente}$$

$$\frac{a}{b}$$

$$0$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

$$\begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ \text{non esiste} \end{cases}$$

b_m definit. positiva

b_m definit. negativa

altrimenti

* POTENZE

$$\lim_{m \rightarrow \infty} a_m$$

$$a > 0$$

$$0 \leq a < 1$$

$$0 \leq a < 1$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} b_m$$

$$b$$

$$+\infty$$

$$-\infty$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (a_m^{b_m})$$

$$a^b$$

$$0$$

$$+\infty$$

$a > 1$	$+\infty$	$+\infty$
$a > 1$	$-\infty$	0
$+\infty$	$b > 0$	$+\infty$
$+\infty$	$b < 0$	0
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	0

il caso $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ lo tralasciamo (apre moltissime casistiche)

CASI ESCLUSI : forme indeterminate (e di indecisione)

$$+\infty - \infty; 0(\pm\infty); \frac{0}{0}; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}; 0^0; 1^{\pm\infty}; (+\infty)^0$$

Esempio:

* consideriamo le successioni $a_n = 1$ e $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$

calcolare, se possibile, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$

$$a_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

$$b_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{(-1)^n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{(-1)^n} \left[\frac{(-1)^n}{(-1)^n} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^n n \quad \text{non ammette limite}$$

perché $c_n := \frac{a_n}{b_n}$ ha $c_{2m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$ e $c_{2m+1} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} -\infty$ irregolare

Esempi : * $\alpha_n = (n+1)^2 - (n-1)^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = +\infty - (+\infty) \quad \text{forma indeterminata}$$

$$\alpha_n = n^2 + 1 + 2n - n^2 + 2n - 1 = 4n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 4n = +\infty \quad \text{diverge positivamente}$$

* $\beta_n = (n+1)^2 - (n+3)^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = +\infty - \infty \quad \text{forma indeterminata}$$

$$\beta_n = n^2 + 2n + 1 - n^2 - 6n - 9 = -4n - 8$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (-4n - 8) = -\infty \quad \text{diverge negativamente}$$

Esempi:

* $\alpha_m = \frac{m+1}{m^2} \quad \lim_{m \rightarrow +\infty} \alpha_m = \frac{+\infty}{+\infty}$ forma indeterminata

$$\alpha_m = \frac{m(1 + \frac{1}{m})}{m^2} = \frac{1 + \frac{1}{m}}{m}$$

$$a_m := 1 + \frac{1}{m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 1$$

$$b_m := m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{a_m}{b_m} = 0$$

* $\beta_m = \frac{m-1}{m} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \frac{+\infty}{+\infty}$ forma indeterminata

$$\beta_m = \frac{m(1 - \frac{1}{m})}{m} = 1 - \frac{1}{m}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{m}\right) = 1$$

Esempi

* $\alpha_m = \frac{1/m^2}{1/m} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \frac{0}{0}$ forma indeterminata

$$\alpha_m = \frac{1}{m^2} \cdot m = \frac{1}{m}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \alpha_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} = 0$$

* $\beta_m = \frac{1/m^2}{1/m^3} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \frac{0}{0}$ forma indetermin. (f.i.)

$$\beta_m = \frac{1}{m^2} \cdot m^3 = m$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \beta_m = \lim_{m \rightarrow \infty} m = +\infty$$

TEOREMA Se $a_m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} a \in \mathbb{R}$ e $b_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} b \in \mathbb{R}$
allora $(a_m + b_m) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (a + b)$

dim: $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_{\varepsilon,1} \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_m - a| < \varepsilon \quad \forall m > \nu_{\varepsilon,1}$ *

$\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_{\varepsilon,2} \in \mathbb{N}$ t.c. $|b_m - b| < \varepsilon \quad \forall m > \nu_{\varepsilon,2}$ *

definisco $\underline{r}_\varepsilon := \max \{ r_{\varepsilon,1}; r_{\varepsilon,2} \}$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall m > r_\varepsilon$$

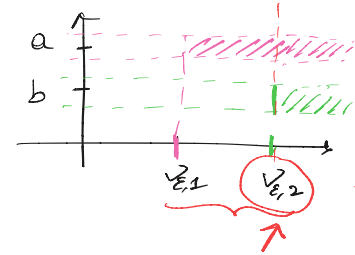
$$|(a_m + b_m) - (a + b)|$$

$$= |a_m - a + b_m - b|$$

disuguaglianza triang. $\leftarrow$

$$\leq \underbrace{|a_m - a|}_{< \varepsilon} + \underbrace{|b_m - b|}_{< \varepsilon} < 2\varepsilon$$

perciò $\forall \varepsilon > 0 \exists r_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $|(a_m + b_m) - (a + b)| < \varepsilon$
cioè $(a_m + b_m) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} (a + b)$ $\square$



TEOREMA: (permanenza del segno)

Se $\underline{a_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a}$ e $a > 0$ allora $\exists r \in \mathbb{N}$ t.c. $a_m > 0 \quad \forall m > r$

dim: $* \forall \varepsilon > 0 \exists r_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_m - a| < \varepsilon \quad \forall m > r_\varepsilon$ (def di limite)

scelgo $\varepsilon = \frac{a}{2}$

$$- \varepsilon < a_m - a < \varepsilon$$

$$a - \varepsilon < a_m < a + \varepsilon$$

$$0 < a - \frac{a}{2} < a_m < a + \frac{a}{2} \quad \forall m > r_\varepsilon$$

per ipotesi

$$\Rightarrow \underline{a_m > 0} \quad \forall m > r_\varepsilon \quad \square$$

COROLLARIO: Se $\underline{a_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a}$ e $\underline{a_m \geq 0} \quad \forall m \in \mathbb{N}$ allora $\underline{a \geq 0}$
($\leq$) definitivamente va bene lo stesso ($\leq$)

dim: per assurdo ipotizziamo che $a < 0$
posso applicare il teorema di permanenza del segno
e dedurre che $a_m < 0$ definitivamente $\nleftrightarrow a_m \geq 0$
per ipotesi
quindi $a \geq 0$ $\square$

OSS: se $\underline{a_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a}$, $a_m > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$ non posso concludere
che $a > 0$ (infatti $a_m = \frac{1}{m}$; $a_m > 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$, ma $a_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$)

COROLLARIO (proprietà del confronto)

Se $a_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} a$ e $b_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} b$ e $a_m \geq b_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Allora $a \geq b$

dim: definiamo la successione $c_m := a_m - b_m$ e osserviamo

(1) che per ipotesi $c_m \geq 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$

inoltre per il teorema precedente (algebra dei limiti)

(2) $c_m \xrightarrow{m \rightarrow \infty} (a - b) =: c$

Quindi posso dedurre dal corollario precedente che

$$c \geq 0 \Rightarrow a \geq b \quad \square$$

TEOREMA (dei due carabinieri)

Siano $\{a_m\}$, $\{b_m\}$, $\{c_m\}$ tre successioni t.c. $\boxed{a_m \leq c_m \leq b_m} \quad \forall m \in \mathbb{N}$

Se $\lim_{m \rightarrow \infty} a_m = \lim_{m \rightarrow \infty} b_m = l \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{m \rightarrow \infty} c_m = l$

dim $\forall \varepsilon > 0 \exists r_{\varepsilon,1} \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_m - l| < \varepsilon \quad \forall m > r_{\varepsilon,1}$

$\forall \varepsilon > 0 \exists r_{\varepsilon,2} \in \mathbb{N}$ t.c. $|b_m - l| < \varepsilon \quad \forall m > r_{\varepsilon,2}$

pongo $r_{\varepsilon} := \max\{r_{\varepsilon,1}; r_{\varepsilon,2}\}$

allora $\forall m > r_{\varepsilon} \quad |a_m - l| < \varepsilon \Leftrightarrow \underline{l - \varepsilon < a_m < l + \varepsilon}$

$|b_m - l| < \varepsilon \Leftrightarrow \underline{l - \varepsilon < b_m < l + \varepsilon}$

$$\underbrace{l - \varepsilon < a_m \leq c_m \leq b_m < l + \varepsilon}$$

$$\Leftrightarrow l - \varepsilon < c_m < l + \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists r_{\varepsilon} \in \mathbb{N} : |c_m - l| < \varepsilon \quad \forall m > r_{\varepsilon} \quad \square$$