infatti $a_{n_0} = (n_0)^3 = \left(\left[\sqrt[3]{M}\right] + 1\right)^3 > M$

DEF: Una successione $\{a_n\}$ è
- strettamente crescente se $a_n < a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- strettamente decrescente se $a_n > a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- crescente se $a_n \leq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- decrescente se $a_n \geq a_{n+1}$ $\forall n \in \mathbb{N}$

$\{a_n\}$ è monotona se una delle quattro definizioni date è verificata; se sono vere la prima o la seconda, $\{a_n\}$ si dice strettamente monotona

Es: * $a_n = n^3$ è strettamente crescente,

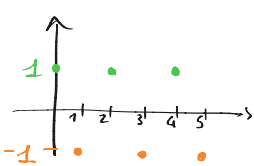
mi chiedo: $n^3 < (n+1)^3$?

$n^3 < n^3 + 1 + 3n^2 + 3n$ è verificata $\forall n \in \mathbb{N}$ ($3n^2 + 3n > 0$)

* $b_n = \frac{1}{n}$ è strettamente decrescente,

$b_n > b_{n+1}$? $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \iff n+1 > n$, vero $\forall n \in \mathbb{N}$

* $c_n = (-1)^n$ nè crescente nè decrescente ($\Rightarrow$ non è monotona)



DEF: * $\max\{a_n\} := \max \operatorname{Im} a_n$
* $\min\{a_n\} := \min \operatorname{Im} a_n$
* $\sup\{a_n\} := \sup \operatorname{Im} a_n$
* $\inf\{a_n\} := \inf \operatorname{Im} a_n$

alternativamente scrivo

$\max\{a_n\} = M \iff a_n \le M \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ $a_{n_0} = M$

$\min\{a_n\} = m \iff a_n \ge m \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $\exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} = m$

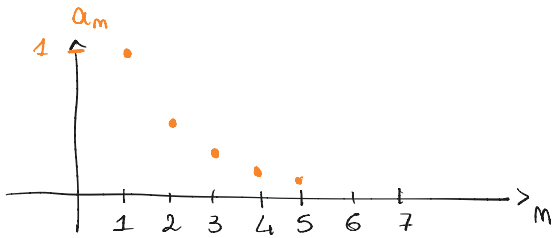
$\sup\{a_n\} = \Lambda \iff$ (i) $a_n \le \Lambda \ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_\varepsilon} > \Lambda - \varepsilon$

$\inf\{a_n\} = \lambda \iff$ (i) $a_n \ge \lambda \ \forall n \in \mathbb{N}$

(ii) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $a_{n_\varepsilon} < \lambda + \varepsilon$

Esempio $b_n = \frac{1}{n}$



- $a_1 = 1$
  ci suggerisce che
  $M = 1 = \max\{a_n\}$
  ↳ $\begin{cases} a_n \le 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \ ? & \frac{1}{n} \le 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ vero} \\ \exists n_0 \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_{n_0} = 1 \ ? & \text{sì, } n_0 = 1 \text{ infatti } a_1 = 1 \end{cases}$

- $\inf\{a_n\} = 0$ però $0 \notin \{a_n\}$ quindi non è minimo

  (i) $\frac{1}{n} \ge 0 \ \forall n \in \mathbb{N}$

  (ii) scelgo ε arbitrario e mi chiedo se esiste n_ε t.c.

  $\lambda + \varepsilon > a_{n_\varepsilon} \iff \varepsilon > \frac{1}{n} \iff n > \frac{1}{\varepsilon}$

  il candidato è $\lambda = 0$

  scelgo $n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$

  $\Rightarrow$ abbiamo trovato un n_ε per ε arbitrario

  $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N} \ \left(n_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1\right)$ t.c. $a_{n_\varepsilon} < \varepsilon$

  $\Rightarrow \inf\{a_n\} = 0$

(alternativamente si può osservare che $(-\infty, 0]$ è l'insieme dei minoranti di $\{a_n\}$; quindi $\inf\{a_n\} = \max(-\infty, 0] = 0$)

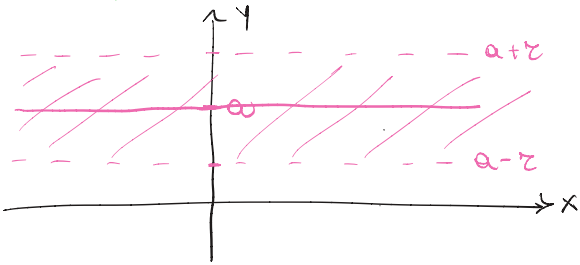
LIMITI DI SUCCESSIONI

proprietà

* $\mathcal{P}(n)$ $(n \in \mathbb{N})$ vale definitivamente se $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\mathcal{P}(n)$ è vera $\forall\, n \geq n_0$ $n \in \mathbb{N}$

  ↳ la proprietà è vera da un certo indice n_0 in poi, sempre)

  ↳ la proprietà non è vera solo per un numero finito di indici da 0 a n_0



$$S_{a,\varepsilon} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y-a| < \varepsilon\}$$

P ; $|y-a| = \text{dist}(P, y=a)$

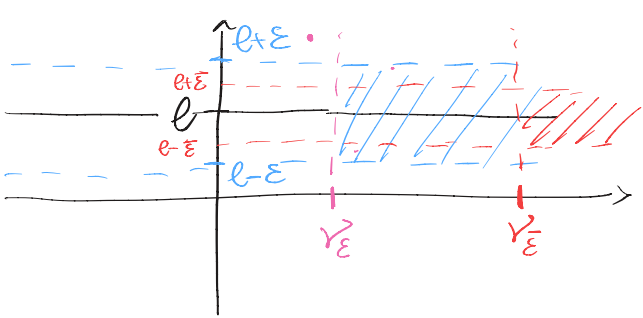
$$|y-a| < \varepsilon$$
$$-\varepsilon < y-a < \varepsilon$$
$$a-\varepsilon < y < a+\varepsilon \qquad P=(x,y)$$

DEF: Diciamo che $\ell \in \mathbb{R}$ è il limite della successione $\{a_n\}$ (oppure $\{a_n\}$ converge / tende a ℓ) e scriviamo

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell \qquad (a_n \xrightarrow{n \to +\infty} \ell)$$

se $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - \ell| < \varepsilon \;\; \forall\, n > \nu_\varepsilon$

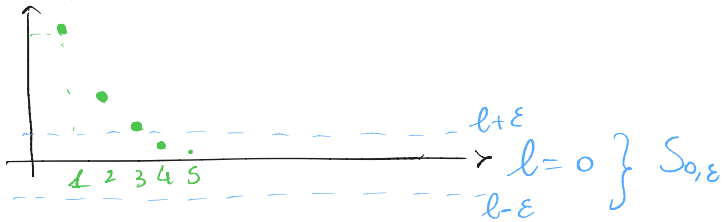
⇝ significa che $\forall \varepsilon > 0$ $|a_n - \ell| < \varepsilon$ definitivamente cioè i punti $P_n = (n, a_n)$ appartengano alla striscia $S_{\ell,\varepsilon}$ definitivamente $(P_n \in S_{\ell,\varepsilon})$



ε, $\tilde{\varepsilon}$

Esempio: $b_m = \frac{1}{m}$ $\quad \lim_{m \to +\infty} b_m = 0$ $\quad \ell = 0$ candidato limite

graficamente



analiticamente

fisso $\varepsilon > 0$ arbitrario $\quad |b_m - 0| < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{m}\right| < \varepsilon$

$\iff -\varepsilon < \frac{1}{m} < \varepsilon$ (sempre vera)

$* \iff m > \frac{1}{\varepsilon}$

posso prendere $\nu_\varepsilon = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right] + 1$ e ottengo

$\forall \varepsilon > 0 \quad |b_m - 0| < \varepsilon \quad \forall m > \nu_\varepsilon$ cioè la def. di limite (ℓ)

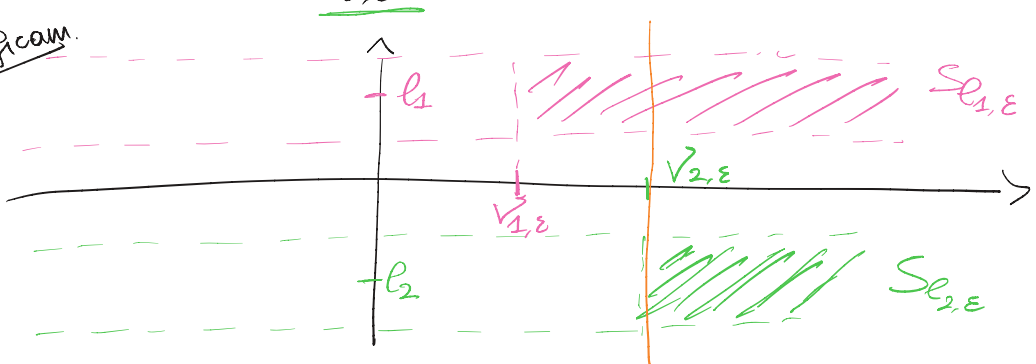
TEOREMA (Unicità del limite)

Se una successione $\{a_m\}$ ammette limite, allora questo è UNICO

dim: PER ASSURDO ✓ supponiamo che $\{a_m\}$ sia convergente e ci siano due limiti ℓ_1 e ℓ_2; dalla definizione:

* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu_{1,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_m - \ell_1| < \varepsilon \quad \forall m > \nu_{1,\varepsilon}$
* $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \nu_{2,\varepsilon} \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_m - \ell_2| < \varepsilon \quad \forall m > \nu_{2,\varepsilon}$

graficam.



$P_n = (n, a_n) \in S_{\ell_1, \varepsilon}$ definitivamente
$P_n = (n, a_n) \in S_{\ell_2, \varepsilon}$ definitivamente
$\Rightarrow P_n \in S_{\ell_1,\varepsilon} \cap S_{\ell_2,\varepsilon}$ definitivamente

ma $S_{\ell_1,\varepsilon} \cap S_{\ell_2,\varepsilon} = \emptyset$ ↯

analiticamente

$\nu_\varepsilon := \max\{\nu_{1,\varepsilon}, \nu_{2,\varepsilon}\}$

$\left(\Rightarrow \begin{array}{c} \forall \varepsilon > 0 \\ |a_n - \ell_1| < \varepsilon \text{ e} \\ |a_n - \ell_2| < \varepsilon \\ \forall n > \nu_\varepsilon \end{array}\right)$

scelgo $\varepsilon := \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$

$|\ell_1 - \ell_2| = |\ell_1 - a_n + a_n - \ell_2|$

disug. triangolare → $\leq \underbrace{|a_n - \ell_1|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_n - \ell_2|}_{<\varepsilon} < 2\varepsilon$

$|\ell_1 - \ell_2| < 2\varepsilon \iff \varepsilon > \dfrac{|\ell_1 - \ell_2|}{2}$ ↯ □

DEF: $\{a_n\}$ si dice convergente se $a_n \xrightarrow{n \to +\infty} \ell$ per qualche $\ell \in \mathbb{R}$

oss $\{a_n\}$ è limitata se $\exists\, m, M \in \mathbb{R}$ t.c. $m \leq a_n \leq M \quad \forall n \in \mathbb{N}$

potrei scegliere opportunamente $K \in \mathbb{R}$ ⇕

$-K \leq a_n \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

TEOREMA Sia $\{a_n\}$ convergente, allora $\{a_n\}$ è limitata

dim: $\{a_n\}$ è convergente $\iff a_n \xrightarrow{n \to +\infty} \ell$ per qualche $\ell \in \mathbb{R}$

$\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$ t.c. $|a_n - \ell| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon$

$\iff \ell - \varepsilon < a_n < \ell + \varepsilon$

conseguentemente $|a_n| = |a_n - l + l| \leq |a_n - l| + |l| < \varepsilon + |l|$

$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots, a_{\nu_\varepsilon}, a_{\nu_\varepsilon+1}, \dots$

ho un numero finito di elementi della successione

$|a_n| < \varepsilon + l$ definitivamente

a_{ν_1} scelgo $\varepsilon = 1$

pongo $K := \max\{a_0, \dots, a_{\nu_1}, 1 + |l|\} \Rightarrow |a_n| \leq K \quad \forall n \in \mathbb{N}$

NON ESISTENZA DEL LIMITE

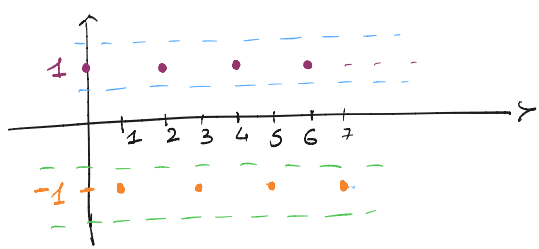
$a_n \xrightarrow{n \to \infty} l \quad \forall \varepsilon > 0 \quad P_n = (n, a_n) \in S_{l,\varepsilon}$ definitivamente

$a_n \not\xrightarrow{n \to \infty} l \quad \exists \varepsilon > 0$ t.c. $P_n = (n, a_n) \notin S_{l,\varepsilon}$

↳ infiniti punti non appartengono alla striscia

Se è vera $\forall l \in \mathbb{R}$ allora $\{a_n\}$ non ammette limite finito

Esempio $a_n = (-1)^n$ non ammette limite



* scelgo 1 come candidato limite
tutti i punti arancioni non appartengono a $S_{1,\varepsilon}$
$\Rightarrow a_n \not\xrightarrow{n \to \infty} 1$

scelgo -1 come candidato limite
tutti i punti viola non appartengono a $S_{-1,\varepsilon}$
$\Rightarrow a_n \not\xrightarrow{n \to \infty} -1$

la sottosuccessione $(-1)^{2k} \longrightarrow 1 \quad k \to +\infty$ lungo i pari

la sottosuccessione $(-1)^{2k+1} \longrightarrow -1 \quad k \to +\infty$ lungo i dispari

$\Rightarrow$ la successione non ammette limite

oss se $a_{2k} \to l_1$ e $a_{2k+1} \to l_2$, $l_1 \neq l_2$
allora $\{a_n\}$ non ammette limite $\left(\nexists \lim_{n\to+\infty} a_n\right)$

Esempio:

* stabilire se $a_n = \sin(n\pi)$ ammette limite
  $a_0 = 0$; $a_1 = 0$; $a_2 = 0$; ... $\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
  si ammette limite e $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

* stabilire se $a_n = \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)$ ammette limite
  $a_0 = 0$; $a_1 = 1$; $a_2 = 0$; $a_3 = -1$
  $a_4 = 0$; $a_5 = 1$; $a_6 = 0$; $a_7 = -1$, ...

  $a_{2k} \longrightarrow 0 \quad k \to \infty$
  $a_{4k+1} \longrightarrow 1 \quad k \to \infty$
  $a_{4k+3} \longrightarrow -1 \quad k \to \infty$

  } a_n non ammette limite

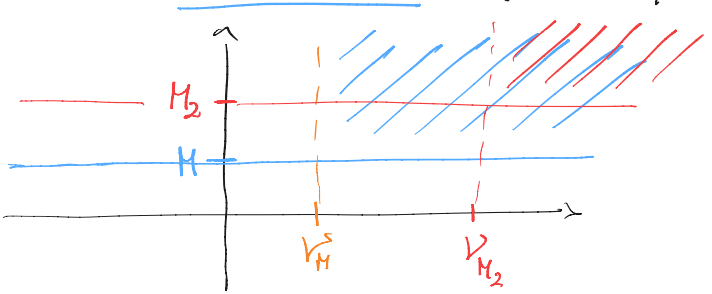
DEF Una successione $\{a_n\}$ ha limite $+\infty$ (si dice che tende a $+\infty$ o diverge positivamente) e si scrive

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \qquad \left(a_n \xrightarrow{n\to\infty} +\infty\right)$$

se $\forall M > 0 \quad \exists \nu_M \in \mathbb{N}$ t.c. $a_n > M \quad \forall n > \nu_M$

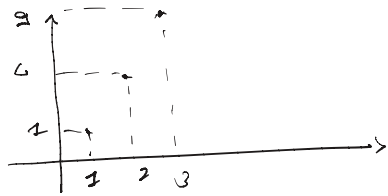
$\Leftrightarrow$

$\forall M > 0 \quad P_n = (n, a_n) \in \overline{S}_M := \{(x,y) : y > M\}$ definitivamente



Esempio: $a_n = n^2$

$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$



$\forall M > 0 \quad a_n > M \iff n^2 > M \iff n > \sqrt{M}$

~~$(n < -\sqrt{M})$~~ $n \geq 0$

posso prendere $n_M = [\sqrt{M}] + 1$

allora ottengo $a_n > M \quad \forall n > n_M$

DEF Una successione $\{a_n\}$ ha limite $-\infty$ (oppure tende a $-\infty$ oppure diverge negativamente) e si scrive

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = -\infty \qquad \left(a_n \xrightarrow{n \to +\infty} -\infty \right)$$

se $\boxed{\forall M > 0 \ \exists \nu_M \in \mathbb{N} \text{ t.c. } a_n < -M \ \forall n > \nu_M}$

$\forall M > 0 \quad P_n = (n, a_n) \in S_M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < -M\}$ definitivamente