

ESERCITAZIONE 3

(02/10/2026)

PARTE I: ANCORA ESERCIZI SUI NUMERI COMPLESSI

Risolvere in $\mathbb{C}$ le seguenti equazioni:

1) $(z-2)^3 = -i$.

Sol. Posto $z-2 = w$, le soluzioni di $w^3 = -i$ sono le radici terze di

$$-i = e^{-\pi/2 i} = 1 \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$\Rightarrow \text{sono date da } w_k = 1^{1/3} \cdot \left[\cos\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) \right] =$$

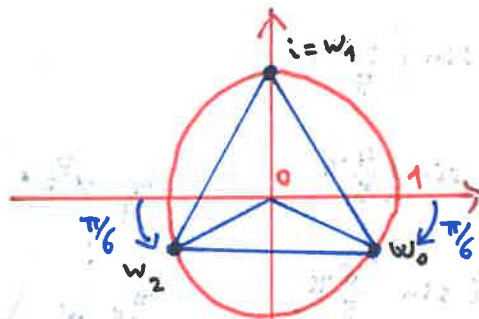
$$= \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}k\right)$$

con $k = 0, 1, 2$:

o) $w_0 = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

o) $w_1 = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = i$

o) $w_2 = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

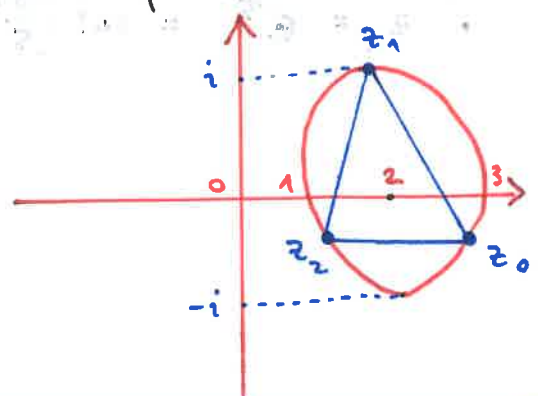


Tornando alla variabile $z = w + 2$, le soluzioni sono dunque

$$z_0 = w_0 + 2 = \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}i = \frac{4 + \sqrt{3} - i}{2}$$

$$z_1 = w_1 + 2 = 2 + i$$

$$z_2 = w_2 + 2 = \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2}i = \frac{4 - \sqrt{3} - i}{2}$$



2) $\boxed{z^2 = \bar{z}^3}$

Sol. Posto $z = \rho e^{i\theta}$ in forma esponenziale, l'equazione diventa

$$\rho^2 e^{2i\theta} = \rho^3 e^{-3i\theta}$$

(ricordando che $\bar{z} = \rho e^{-i\theta}$).

Otteniamo il sistema di equazioni reali

$$\begin{cases} \rho^2 = \rho^3 \\ 2\theta = -3\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

L'equazione $\rho^2 = \rho^3$ ha soluzioni $\rho = 0 \vee \rho = 1$; la seconda

$\rightarrow$ corrispondente
a $z = 0$

equazione dà invece $\theta = \frac{2k\pi}{5}$, $k \in \mathbb{Z}$, e quindi complessivamente le soluzioni sono

$$z = 0 \quad \text{e} \quad z_k = e^{\frac{2k\pi i}{5}} = \cos\left(\frac{2k\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2k\pi}{5}\right),$$

che dà valori distinti per $k = 0, 1, 2, 3, 4$:

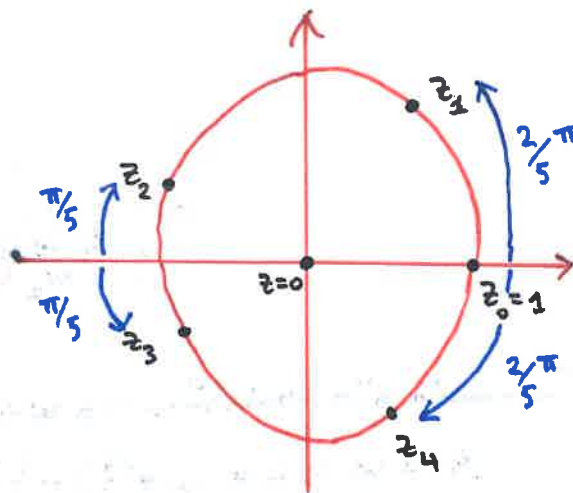
.) $z_0 = e^0 = 1$

.) $z_1 = e^{\frac{2\pi i}{5}} = \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)$

.) $z_2 = e^{\frac{4\pi i}{5}} = \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right)$

.) $z_3 = e^{\frac{6\pi i}{5}} = \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{6\pi}{5}\right)$

.) $z_4 = e^{\frac{8\pi i}{5}} = \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right) + i \sin\left(\frac{8\pi}{5}\right)$

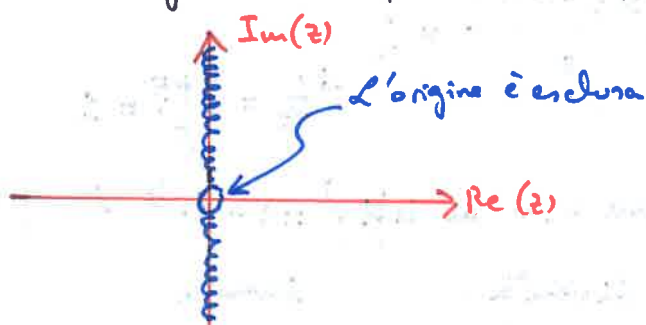


13

$$3) (z + \bar{z}) \cdot \left(\frac{1}{z^2} + 2\bar{z}^2 - i\sqrt{3} \cdot \frac{\bar{z}}{z} \right) = 0$$

Sol. Perché l'equazione sia definita si deve avere $z \neq 0$; le sue soluzioni sono date dall'unione delle soluzioni di $z + \bar{z} = 0$ (con $z \neq 0$) e di quelle di $\frac{1}{z^2} + 2\bar{z}^2 - i\sqrt{3} \cdot \frac{\bar{z}}{z} = 0$.

L'equazione $0 = z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$, con $z \neq 0$, ha come soluzioni tutti i punti $\neq 0$ dell'asse immaginario nel piano complesso:



L'equazione $\frac{1}{z^2} + 2\bar{z}^2 - i\sqrt{3} \cdot \frac{\bar{z}}{z} = 0$, moltiplicando per z^2 e ricordando che $z \cdot \bar{z} = |z|^2$, è equivalente a

$$1 + 2z^4 - i\sqrt{3} \cdot |z|^2 = 0,$$

ossia a

$$2z^4 = -1 + \sqrt{3} \cdot |z|^2 \cdot i.$$

Poniamo in forma esponenziale $z = \rho e^{i\vartheta}$, perché l'equazione diventa

$$2\rho^4 e^{4i\vartheta} = -1 + \sqrt{3}\rho^2 i, \quad (*)$$

e chiamiamo $-1 + \sqrt{3}\rho^2 i = w$: vogliamo scrivere w in forma esponenziale. Abbiamo

$$|w| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3}\rho^2)^2} = \sqrt{1 + 3\rho^4}$$

$$\Rightarrow w = \sqrt{1 + 3\rho^4} \cdot e^{i\varphi}$$

per qualche angolo φ che dipende da ρ , e l'equazione (*) diventa

$$2\rho^4 e^{4i\theta} = \sqrt{1+3\rho^4} \cdot e^{i\varphi} \quad (**)$$

Uguagliandone i moduli, otteniamo

$$2\rho^4 = \sqrt{1+3\rho^4},$$

ovvia

$$4\rho^8 = 1 + 3\rho^4.$$

Posto $\rho^4 = t$, tale equazione diventa $4t^2 - 3t - 1 = 0$, che ha soluzioni

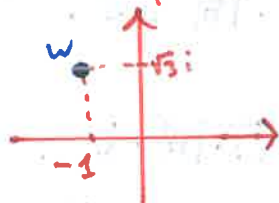
$$t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4 \cdot 4}}{8} = \begin{cases} t_1 = \frac{3-5}{8} = -\frac{1}{4} < 0 \text{ NON accettabile, } \\ t_2 = \frac{3+5}{8} = 1 \end{cases} \text{ perché } t = \rho^4 > 0$$

$\Rightarrow$ l'unica soluzione (reale) di $4\rho^8 = 1 + 3\rho^4$ è $\rho = 1$:

per tale valore, $w = -1 + \sqrt{3}\rho^2 i$ diventa

$$w = -1 + \sqrt{3}i \Rightarrow \varphi = \arg(w) = \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(w)}{\operatorname{Re}(w)}\right) + \pi = \arctan(-\sqrt{3}) + \pi =$$

w è nel II quadrante



$$= -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi.$$

$$\begin{aligned} \arctan(-\sqrt{3}) &= \\ &= -\arctan(\sqrt{3}) = \\ &= -\frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

L'equazione (**) allora è (per $\rho = 1$ e $\varphi = \frac{2}{3}\pi$):

$$2e^{4i\theta} = 2e^{\frac{2}{3}\pi i}$$

$$\Rightarrow 4\theta = \frac{2}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

Le soluzioni $z_k = e^{(\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2})i}$ corrispondenti sono distinte per $k=0,1,2,3$, e sono:

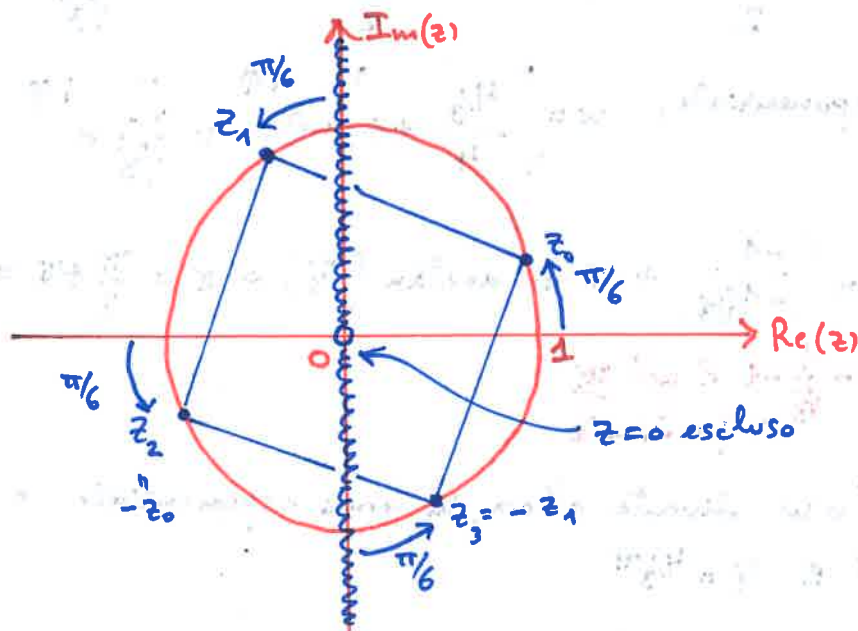
$$\cdot) z_0 = e^{\frac{\pi}{6}i} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$\cdot) z_2 = e^{(\frac{\pi}{6} + \pi)i} = \cos\left(\frac{7}{6}\pi\right) + i\sin\left(\frac{7}{6}\pi\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = -z_0$$

$$\cdot) z_1 = e^{(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2})i} = \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$\cdot) z_3 = e^{(\frac{\pi}{6} + \frac{3}{2}\pi)i} = \cos\left(\frac{5}{3}\pi\right) + i\sin\left(\frac{5}{3}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = -z_1.$$

Le soluzioni dell'equazione di partenza sono perciò date da:



(Si noti infatti che, se $f(z) = \frac{1}{z^2} + 2z^2 - i\sqrt{3}\frac{\bar{z}}{z}$, si ha $f(-z) = f(z)$
 $\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, ossia f è "pari" nella variabile $z \Rightarrow$ se un certo z è
 soluzione di $f(z)=0$, anche $-z$ sarà soluzione di $f(z)=0$).

$$4) \quad z^2 + \frac{i}{z^2} = -\frac{\bar{z}^2}{2}$$

Sol. Si deve avere $z \neq 0$. Moltiplicando per z^2 entrambi i lati, per $z \neq 0$,
 otteniamo l'equazione equivalente

$$z^4 + i = -\frac{|z|^4}{2}$$

(essendo $z \cdot \bar{z} = |z|^2 \Rightarrow z^2 \cdot \bar{z}^2 = (z \cdot \bar{z})^2 = |z|^4$).

Posto $w := -\frac{|z|^4}{2} - i$ e $z = \rho e^{i\theta}$ in forma esponenziale (con $\rho > 0$),

abbiamo $|w| = \sqrt{\frac{\rho^8}{4} + 1}$, e l'equazione $z^4 = w$, uguagliando i
 moduli, impone

$$\rho^4 = \sqrt{\frac{\rho^8}{4} + 1} \Rightarrow \rho^8 = \frac{\rho^8}{4} + 1, \text{ ossia } \frac{3}{4}\rho^8 = 1,$$

che come unica soluzione reale $\rho > 0$ dà $\rho = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/8}$.

16

Allora $w = \frac{-\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{1/8}\right]^4}{2} - i = -\frac{\sqrt{\frac{4}{3}}}{2} - i = -\frac{1}{\sqrt{3}} - i$

$\Rightarrow$ in forma esponenziale, $w = \sqrt{\frac{4/3}{4} + 1} \cdot e^{i\varphi} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\varphi}$

con $\varphi = \arctan\left(\frac{-1}{-1/\sqrt{3}}\right) + \pi = \arctan(\sqrt{3}) + \pi = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4}{3}\pi$

$\rightarrow w = -\frac{1}{\sqrt{3}} - i$ è nel III quadrante

L'equazione $z^4 = w$ diventa allora, in forma esponenziale e con $|z| = \rho = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/8}$ e $\varphi = \frac{4}{3}\pi$

$$\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{1/8}\right]^4 \cdot e^{4i\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} e^{4i\theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{4}{3}\pi}$$

$$\Rightarrow 4\theta = \frac{4}{3}\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}$$

Le soluzioni dell'equazione data sono perciò

$$z_k = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/8} \cdot e^{(\pi/3 + k\pi/2)i}$$

$$= \left(\frac{4}{3}\right)^{1/8} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}\right) \right],$$

che sono distinte per $k = 0, 1, 2, 3$:

•) $z_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/8} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/8} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

•) $z_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/8} \cdot \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) + i \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/8} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$

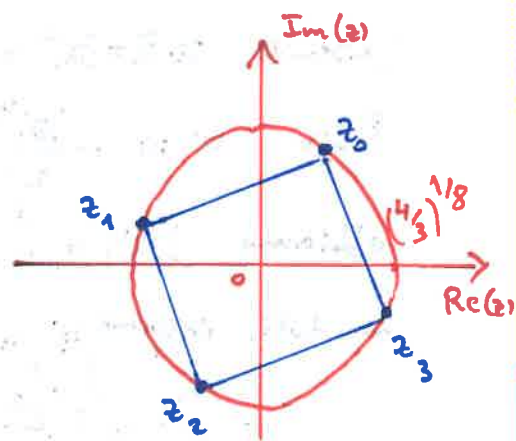
$\Rightarrow$ le altre due soluzioni sono

$$z_2 = -z_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/8} \cdot \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

e $z_3 = -z_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^{1/8} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

perché (come nell'esercizio precedente) la funzione $f(z) = z^2 + \frac{i}{z^2} + \frac{\bar{z}^2}{2}$ soddisfa

$$f(z) = f(-z).$$

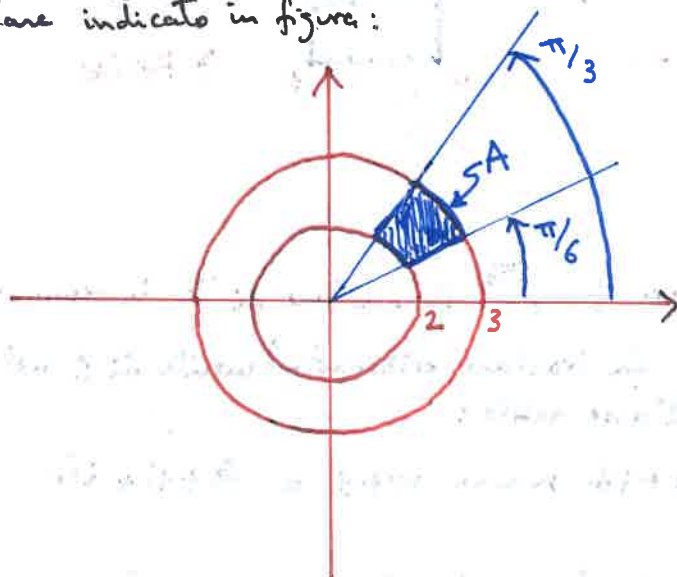


5) Rappresentare nel piano complesso gli insiemi

$$A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 2 \leq |z| \leq 3, \frac{\pi}{6} \leq \arg(z) \leq \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$B = \left\{ \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \cdot z : z \in A \right\}$$

Sol. Per ogni numero reale, $r > 0$, l'insieme dei numeri complessi: $z \in \mathbb{C}$ t.c. $|z| = r$ rappresenta la circonferenza (nel piano complesso) centrata nell'origine e di raggio r . L'insieme A è dunque dato dallo "spicchio" di corona circolare indicato in figura:



Per trovare B , dobbiamo capire in che modo la moltiplicazione per $w = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ agisce sugli elementi di A .

Scriviamo w in forma esponenziale: $w = -\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \Rightarrow |w| = \sqrt{\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$ e poiché $-\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)$

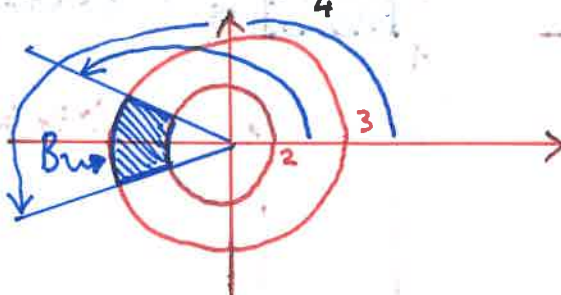
abbiamo $-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i = \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \Rightarrow w = e^{\frac{3}{4}\pi i}$.

Per ogni $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ si ha allora $w \cdot z = e^{\frac{3}{4}\pi i} \cdot \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta + \frac{3}{4}\pi)}$, ossia il modulo di z non cambia e z viene semplicemente rotato di $\frac{3}{4}\pi$ ($= 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$) in senso antiorario.

Pertanto, B si ottiene ruotando A di $\frac{3}{4}\pi$ in senso antiorario:

$$\frac{\pi}{6} + \frac{3}{4}\pi = \frac{11}{12}\pi$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{3}{4}\pi = \frac{13}{12}\pi$$

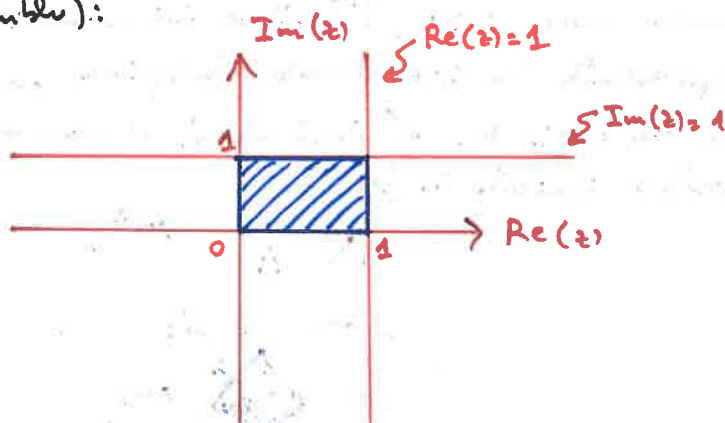


6) Rappresentare nel piano complesso gli insiemi:

$$A = \{ z \in \mathbb{C} : 0 \leq \operatorname{Re}(z) \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im}(z) \leq 1 \}$$

$$B = \{ i \cdot z + 1 + i : z \in A \}$$

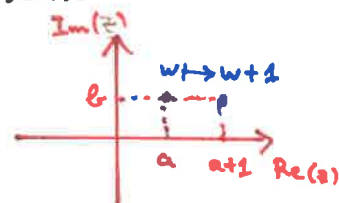
Sol. A è l'insieme (in blu):



Poi: 1) moltiplicare per $i = e^{i\pi/2}$ fa rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario;

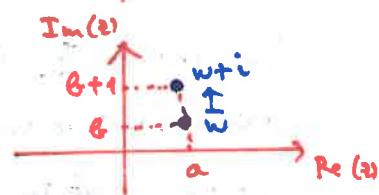
2) sommare 1 fa traslare orizzontalmente di 1 nel senso positivo dell'asse reale:

$$w = a + ib \rightsquigarrow w + 1 = (a+1) + ib$$

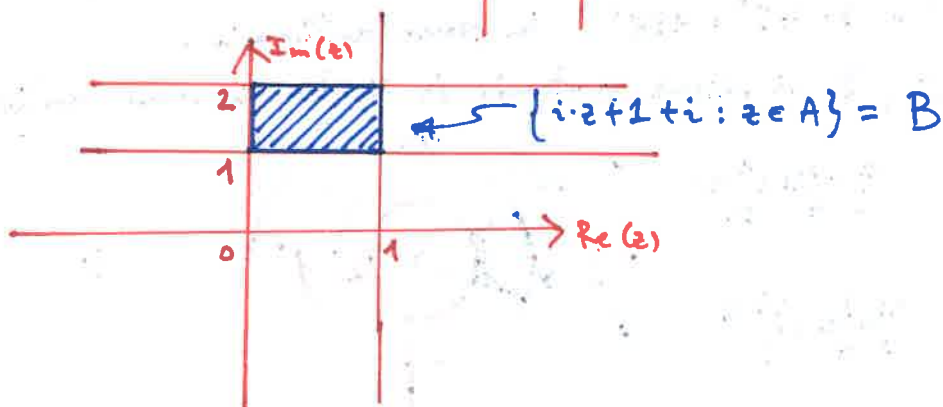
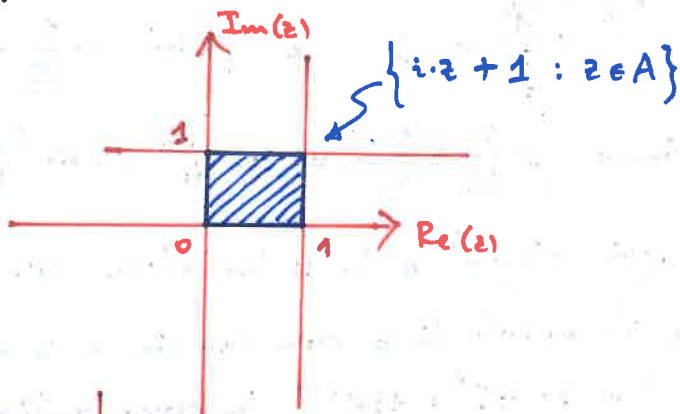
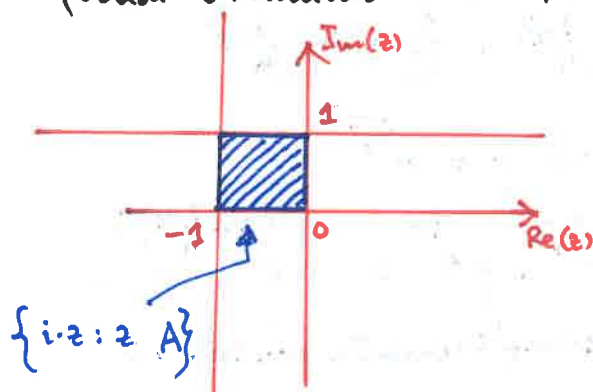


3) sommare i fa traslare verticalmente di 1 nel senso positivo dell'asse immaginario:

$$w = a + ib \rightsquigarrow w + i = a + i(b+1)$$



Quindi otteniamo B da A così:



7) Rappresentare nel piano complesso gli insiemi

$$A = \{z \in \mathbb{C} : (\operatorname{Re}(z) - 2)^2 + (\operatorname{Im}(z) + 1)^2 = 1\}$$

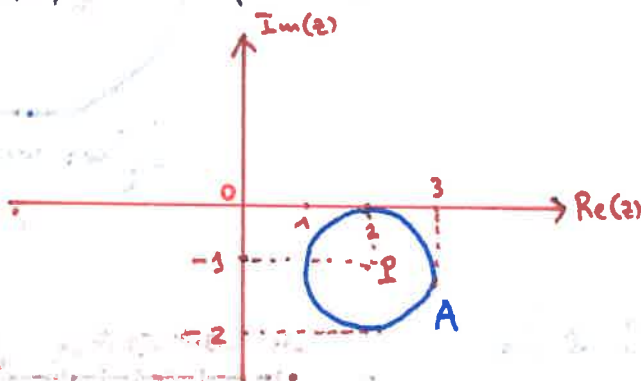
$$B = \{3z : z \in A\}$$

$$C = \left\{ \frac{1}{i} \cdot w + 2 : w \in B \right\}$$

Sol. Scrivendo $z = x + iy$ in forma algebrica, è immediato osservare che l'insieme

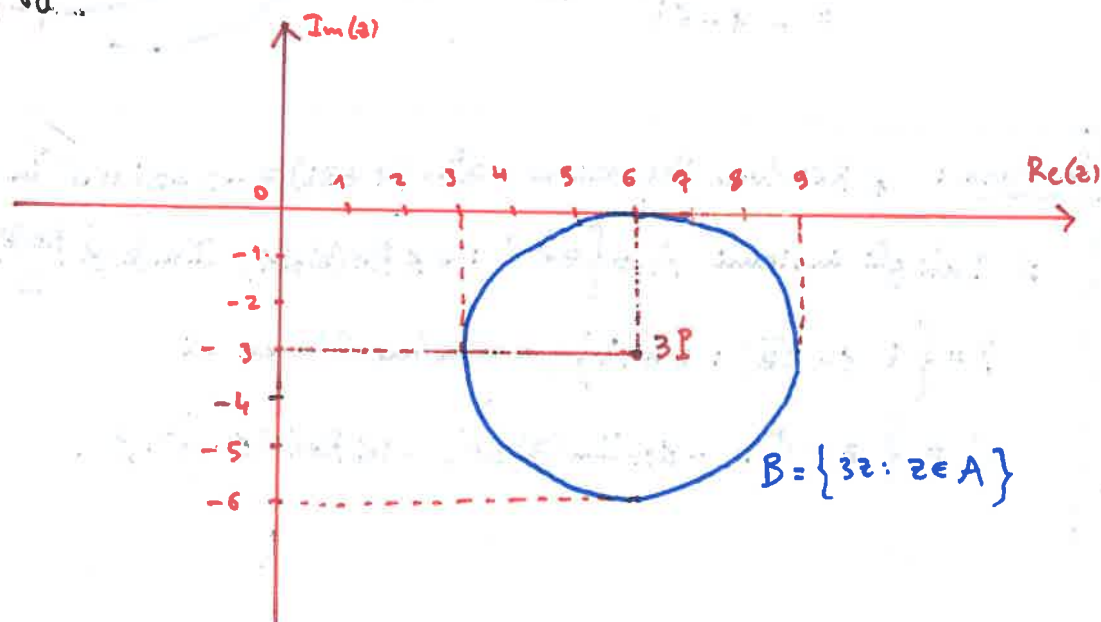
$$A = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 1\}$$

rappresenta la circonferenza, nel piano complesso, di raggio $r = 1$ e centrata in $(2, -1)$, ossia nel punto $P = 2 - i$



Per trovare B, osserviamo che se $z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{C}$ (in forma esponenziale) si ha $3 \cdot z = 3 \cdot \rho e^{i\theta} \Rightarrow$ l'argomento non cambia e il modulo viene triplicato.

L'insieme A viene quindi mandato, tramite moltiplicazione per 3, nella circonferenza di raggio $3r = 3$ centrata in $3P = 6 - 3i$



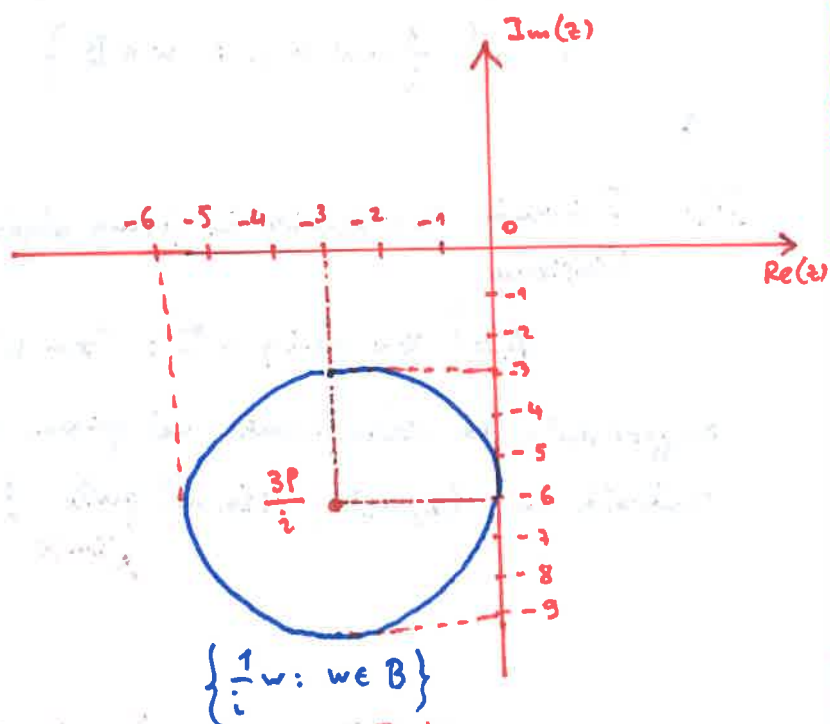
Per trovare C :

- 1) moltiplicare per $\frac{1}{i} = i^{-1} = e^{-\frac{\pi}{2}i}$ fa rotare di $\frac{\pi}{2}$ in senso orario
- 2) sommare 2 fa traslare orizzontalmente di 2 nel senso positivo dell'asse reale (cf. l'esercizio precedente)

$\Rightarrow \left\{ \frac{1}{i} w : w \in B \right\}$ è la circonferenza di raggio 3 centrata in

$$\frac{1}{i} \cdot 3P = -i(6-3i) = -3-6i$$

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{i} \cdot \frac{i}{i} = \frac{i}{-1} = -i$$



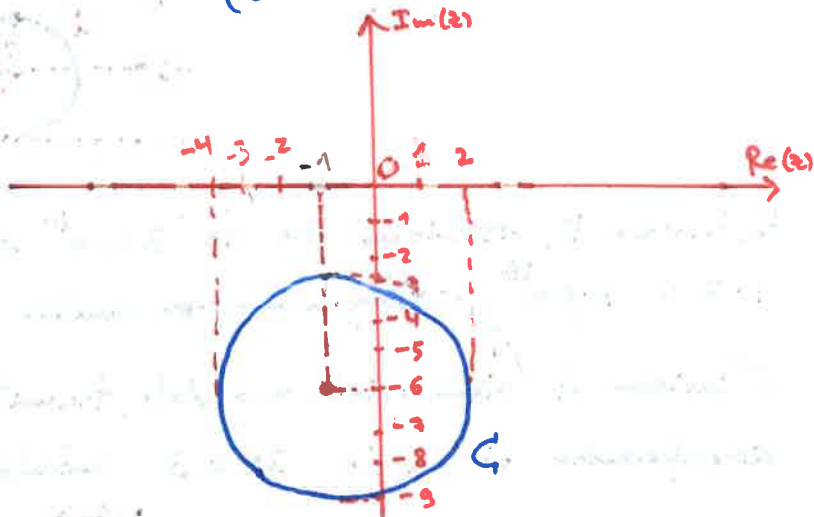
e infine

$\left\{ \frac{1}{i} w + 2 : w \in B \right\} = C$ è la circonferenza di raggio 3

centrata in

$$\frac{3P}{i} + 2 = (-3-6i) + 2 =$$

$$= -1-6i$$



Per casa: 1) Risolvere l'equazione $z^2 - (1+3i)z - 2+2i = 0$ in $\mathbb{C}$.

2) Dati gli insiemi $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(z) \leq 1, Im(z) \leq \frac{Re(z)}{2} \right\}$ e

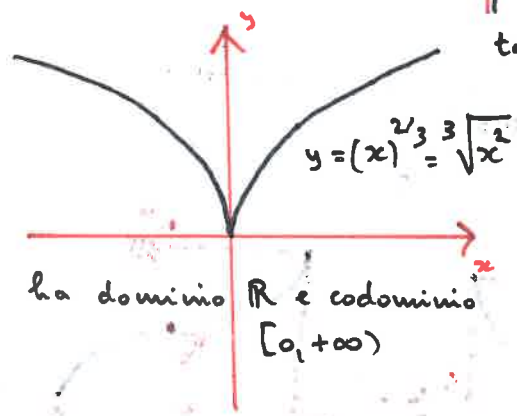
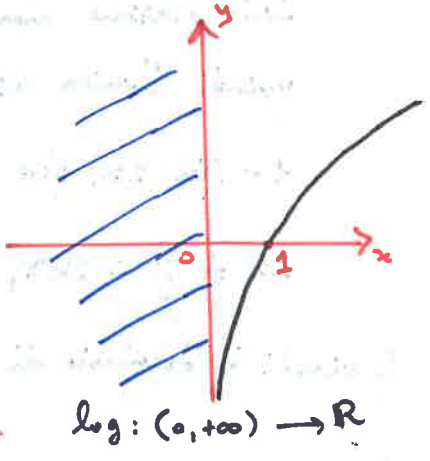
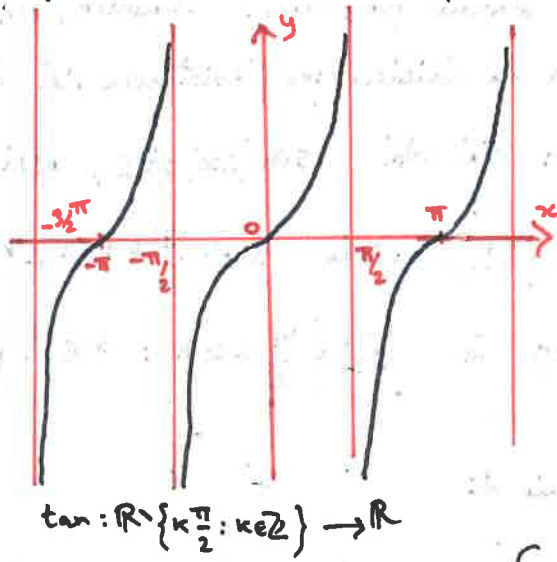
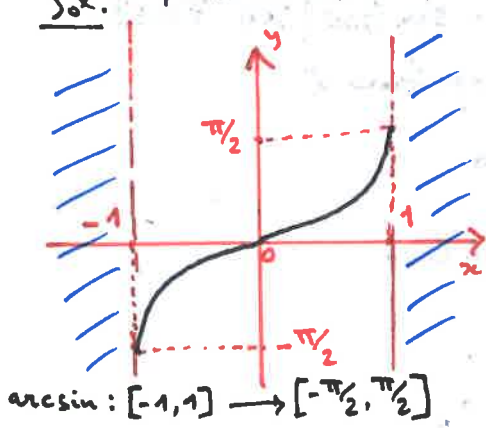
$B = \left\{ i(1-2\bar{z}) : z \in A \right\}$, calcolare l'area di

$C = \left\{ z \in \mathbb{C} : -1 \leq Im(z) \leq 0, -1 \leq Re(z) \leq 0 \right\} \setminus B$.

Parte II : generalità sulle funzioni reali di variabile reale e sulle successioni

1) Trovare il dominio della funzione (reale)
$$f(x) = \frac{\log(\tan(\arcsin(x)))}{(1-2x)^{2/3}}$$

Sol. Ricordiamo come sono fatte le funzioni che compongono f:



$\Rightarrow$ abbiamo bisogno di :

- $x \in [-1, 1]$ per l'esistenza di $\arcsin(x)$
- $\arcsin(x) \neq \pm \pi/2$ per l'esistenza di $\tan(\arcsin(x))$
- $0 < \tan(\arcsin(x))$ per l'esistenza di $\log(\tan(\arcsin(x)))$
- $(1-2x)^{2/3} \neq 0$ per l'esistenza della frazione

$\Rightarrow \arcsin(x) \neq \pm \pi/2$ dà $x \in (-1, 1)$ (aperto!);
poi, $\tan(\arcsin(x)) > 0$ dà $\arcsin(x) > 0 \Rightarrow x \in (0, 1)$;
poi, $(1-2x)^{2/3} \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$.

Quindi il dominio di f è $(0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

2) Determinare il dominio di

$$g(x) = \frac{\log |1 - \sin(2x)|}{\sqrt{\cos(x) + 2}}$$

Sol. Poiché $-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, vale $1 \leq \cos(x) + 2 \leq 3 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \cos(x) + 2 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, e sia l'esistenza della radice, sia l'esistenza della frazione non danno problemi. Inoltre, $|1 - \sin(2x)| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$, quindi l'unica cosa da chiedere per l'esistenza del logaritmo è

$1 - \sin(2x) \neq 0$: ciò dà $\sin(2x) \neq 1$, ossia

$2x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, ossia $x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$:

Quindi il dominio di g è $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi : k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3) Determinare il dominio di

$$f(x) = \arcsin(\arccos(x)) \cdot \log(x|x| - 2x + 3)$$

Sol. Dobbiamo avere $x \in [-1, 1]$ per l'esistenza di $\arccos(x)$ e

$\arccos(x) \in [-1, 1]$ per l'esistenza di $\arcsin(\arccos(x))$,

ossia $-1 \leq \arccos(x) \leq 1$.

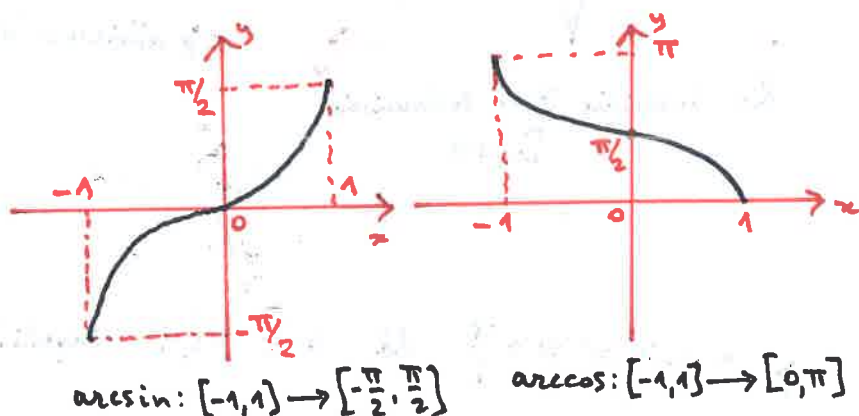
La condizione $\arccos(x) \geq -1$ non è un problema, perché $\arccos(x) \geq 0 \quad \forall x \in [-1, 1]$; avremo invece $\arccos(x) = 1$ per $x = \cos(1)$.

Inoltre, la funzione arcocoseno è monotona strettamente decrescente

$\Rightarrow$ si avrà $0 \leq \arccos(x) \leq 1$ (e quindi in particolare $-1 \leq \arccos(x) \leq 1$)

per $x \in [\cos(1), 1]$. Si osservi anche che $\cos(1) > 0$, visto che

$1 < \frac{\pi}{2}$ e $0 \leq \arccos(x) < \frac{\pi}{2}$ per $0 < x \leq 1$.



Quindi, in particolare, la condizione $x \in [\cos(1), 1]$ dà $x > 0 \Rightarrow |x| = x$ per tali valori, e la condizione di esistenza del logaritmo diventa semplicemente

$$x^2 - 2x + 3 > 0,$$

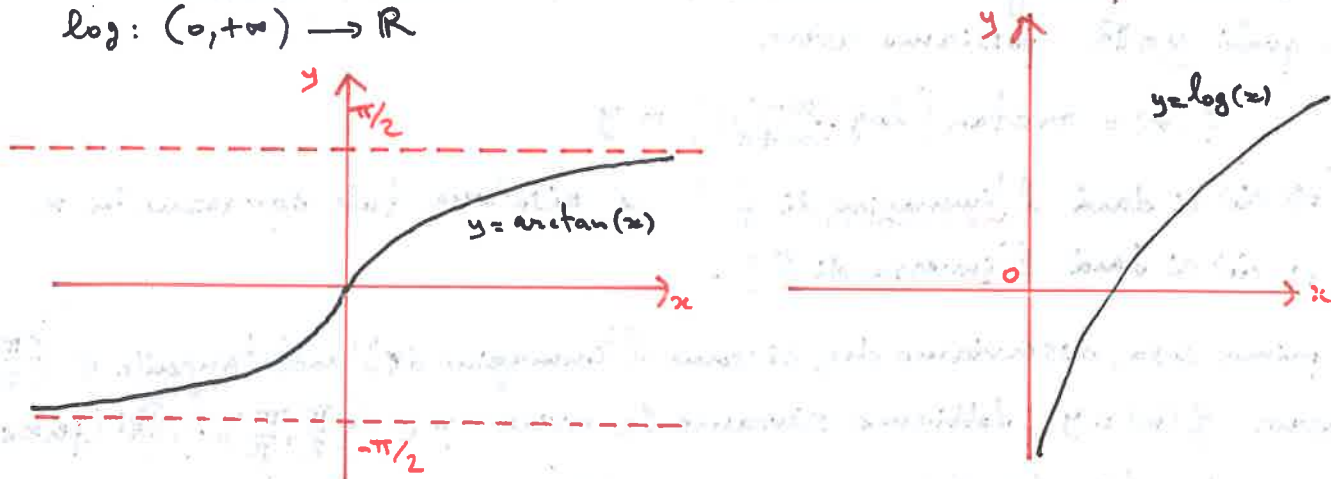
per $x > 0$: tale condizione è sempre verificata, poiché $\Delta = 4 - 4 \cdot 3 < 0$

$\Rightarrow$ il logaritmo esiste per ogni $x \in [\cos(1), 1]$, e concludiamo che il dominio di f è proprio $[\cos(1), 1]$.

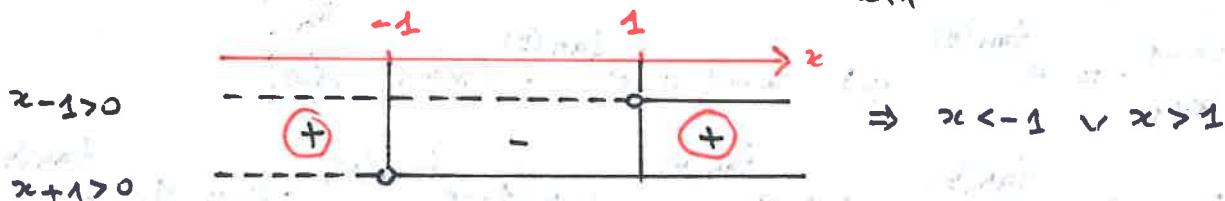
4) Data $f(x) = \arctan\left(\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right)$:

- i) determinare il dominio di f ;
- ii) verificare che f è iniettiva;
- iii) scrivere esplicitamente l'inversa e l'immagine di f .

Sol. La funzione $\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$ è biunivoca, così come la funzione $\log: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$



Il dominio di f perciò è dato dalla sola condizione $\frac{x-1}{x+1} > 0$:



$$\Rightarrow \underline{\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)}.$$

Inoltre, sia $y = \arctan(x)$ sia $y = \log(x)$ sono iniettive sul loro dominio, quindi per dimostrare che f è iniettiva basta mostrare che lo è.

La funzione $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$ ($\Rightarrow$ segue che $f(x) = \arctan(\log(g(x)))$ è
 iniettiva in quanto composizione di funzioni iniettive).

Ricordiamo che dire che g è iniettiva significa dire che vale $(\forall x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\})$

$$g(x) = g(y) \Rightarrow x = y.$$

Mostriamo che questo è vero: per ogni $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$g(x) = g(y) \Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{y-1}{y+1} \Leftrightarrow (x-1)(y+1) = (x+1)(y-1)$$

$$\Leftrightarrow xy + x - y - 1 = xy - x + y - 1$$

$$\Leftrightarrow 2x = 2y \Leftrightarrow x = y, \text{ come si voleva.}$$

Quindi f è iniettiva.

Per trovare l'immagine e l'inversa di $f: \text{Dom}(f) \rightarrow \text{Im}(f)$, dobbiamo capire per quali $y \in \mathbb{R}$ possiamo avere

$$f(x) = \arctan\left(\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = y$$

($\Rightarrow$ ciò ci darà l'immagine di f) e risolvere tale equazione in x

($\Rightarrow$ ciò ci darà l'inversa di f).

Per prima cosa, osserviamo che, siccome l'immagine dell'arctotangente è $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, per avere $f(x) = y$ dobbiamo sicuramente avere $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Poi (per $x \in \text{Dom}(f)$):

$$\arctan\left(\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\right) = y \Leftrightarrow \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \tan(y)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1}{x+1} = e^{\tan(y)} \Leftrightarrow x-1 = e^{\tan(y)} \cdot (x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - x \cdot e^{\tan(y)} = 1 + e^{\tan(y)} \Leftrightarrow (1 - e^{\tan(y)}) \cdot x = 1 + e^{\tan(y)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1 + e^{\tan(y)}}{1 - e^{\tan(y)}} : \text{ questa espressione esiste per ogni } y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \text{ t.c.}$$

$$e^{\tan(y)} \neq 1, \text{ cioè per } y \neq 0 \Rightarrow \text{ l'immagine di } f \text{ è } \text{Im}(f) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\}$$

$$\text{e l'inversa di } f: (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \setminus \{0\} \text{ è } f^{-1}(y) = \frac{1 + e^{\tan(y)}}{1 - e^{\tan(y)}}.$$

5) Data $f(x) = e^{\sqrt{|x^2-2x-3|}}$:

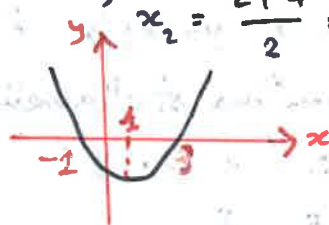
- determinare il dominio e l'immagine di f ;
- verificare che f non è iniettiva sul suo dominio;
- trovare dei sottoinsiemi del dominio di f sui quali f è iniettiva e la cui unione dà tutto il dominio di f .

Sol. Il dominio di $y = e^x$ è $\mathbb{R}$, così come quello di $y = |x^2 - 2x - 3|$; inoltre, il dominio di $y = \sqrt{x}$ è $[0, +\infty)$ e $|x^2 - 2x - 3| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ il dominio di f è $\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

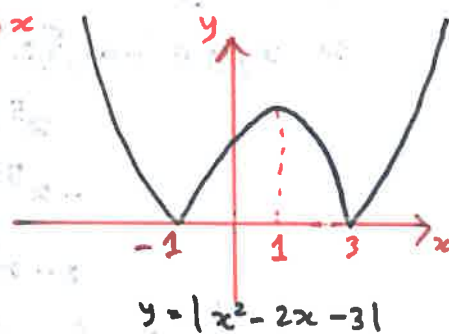
Per trovare l'immagine di f , troviamo innanzitutto l'immagine di $y = |x^2 - 2x - 3|$:

$$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 3}}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{2-4}{2} = -1 \\ x_2 = \frac{2+4}{2} = 3 \end{cases}$$

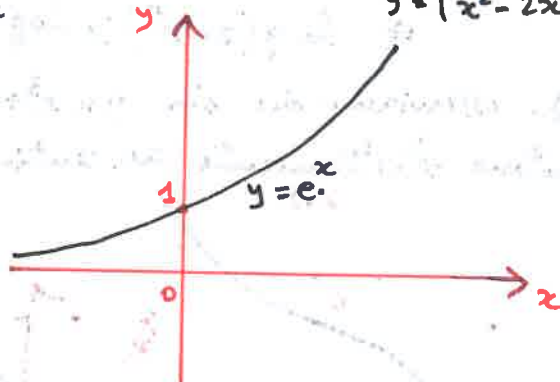
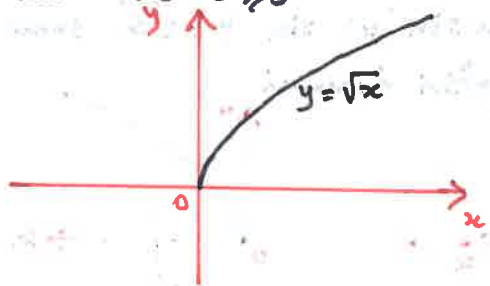
$\Rightarrow y = x^2 - 2x - 3$ è la parabola



$\Rightarrow$ l'immagine di $y = |x^2 - 2x - 3|$ è $[0, +\infty)$.



Poiché anche $y = \sqrt{x}$ (per $x \geq 0$) ha immagine $[0, +\infty)$ e inoltre $y = e^x$ ha immagine $[1, +\infty)$ quando è ristretta alle $x \geq 0$



segue che l'immagine di f è $[1, +\infty)$.

Poiché $y = |x^2 - 2x - 3|$ si annulla in $x = -1$ e in $x = 3$, abbiamo poi:

$$f(-1) = e^0 = 1 = f(3) \quad \Rightarrow \quad \underline{f \text{ non è iniettiva in } \text{Dom}(f) = \mathbb{R}}.$$

Infine, poiché sia $y = e^x$ sia $y = \sqrt{x}$ sono iniettive nel loro dominio e $y = |x^2 - 2x - 3|$ è iniettiva in $(-\infty, -1]$, $[-1, 1]$, $[1, 3]$ e $[3, +\infty)$ separatamente, segue che anche

f è iniettiva sugli intervalli $I_1 = (-\infty, -1]$, $I_2 = [-1, 1]$, $I_3 = [1, 3]$, $I_4 = [3, +\infty)$

e $I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = \mathbb{R} = \text{Dom}(f)$.

6) i) Quali fra le funzioni

$$f(x) = \log(2 - x^5), \quad g(x) = \sqrt{\arcsin(x^3 + x)}, \quad h(x) = x \sin(x)$$

sono monotone nel proprio dominio?

ii) Quali fra le funzioni

$$f(x) = \log(|x|) + x^4, \quad g(x) = 1 + x^6, \quad h(x) = \arctan(x^3)$$

sono pari o dispari?

Sol. i) Il dominio di f è dato da $2 - x^5 > 0$, ossia $x < \sqrt[5]{2}$, ossia $(-\infty, \sqrt[5]{2})$. Poiché $y = 2 - x^5$ è monotona strettamente decrescente e $y = \log(x)$ è monotona strettamente crescente, segue che f è monotona strettamente decrescente sul suo dominio:

se $x, y \in (-\infty, \sqrt[5]{2})$ e $x < y$:

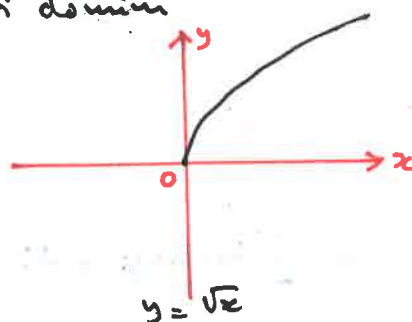
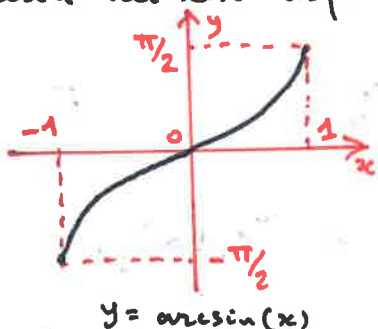
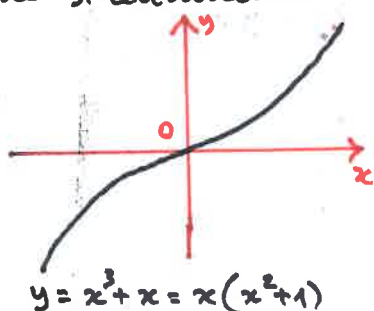
$$x^5 < y^5$$

$$-x^5 > -y^5$$

$$2 - x^5 > 2 - y^5$$

$$\Rightarrow \log(2 - x^5) > \log(2 - y^5)$$

Per g , osserviamo che sia $y = x^3 + x$ sia $y = \arcsin(x)$ sia $y = \sqrt{x}$ sono monotone strettamente crescenti nei loro rispettivi domini



$\Rightarrow$ la funzione composta $g(x) = \sqrt{\arcsin(x^3 + x)}$ è anch'essa monotona strettamente crescente nel suo dominio.

Infine, è chiaro che $h(x) = x \sin(x)$ non è monotona nel suo dominio $\mathbb{R}$, essendo $y = \sin(x)$ oscillante: ad esempio, abbiamo $0 < \frac{\pi}{2} < \pi$ ma $h(0) = h(\pi) = 0$ e $h(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

ii) Ricordiamo che una funzione $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è pari se $\forall x \in D$ anche $-x \in D$ ($\Rightarrow D$ deve essere simmetrico rispetto a 0) e $f(-x) = f(x)$; è dispari quando invece $f(-x) = -f(x)$. Nel nostro caso:

o) $f(x) = \log(|x|) + x^4$ è chiaramente pari, poiché ha dominio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(-x) = \log(|-x|) + (-x)^4 = \log(|x|) + x^4 = f(x)$;

o) $g(x) = 1 + x^6$ ha dominio $\mathbb{R}$ ed è pari: $g(-x) = 1 + (-x)^6 = 1 + x^6 = g(x)$.

(Osserviamo che invece la funzione $\tilde{g}(x) = 1 + x^5$ non è né pari né dispari, perché $\tilde{g}(-x) = 1 + (-x)^5 = 1 - x^5 \neq 1 + x^5$ ($\Rightarrow \tilde{g}$ non è pari) e $\tilde{g}(-x) = 1 - x^5 \neq -(1 + x^5)$ ($\Rightarrow \tilde{g}$ non è dispari).)

o) $h(x) = \arctan(x^3)$ è dispari, perché tali sono $y = x^3$ e $y = \arctan(x)$:

$$h(-x) = \arctan((-x)^3) = \arctan(-x^3) = -\arctan(x^3) = -h(x).$$

7) Stabilire se le successioni $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con

$$a_n = \log\left(\frac{n+3}{n+1}\right) \quad \text{e} \quad b_n = \frac{1}{n^2 + 1} + (-1)^n \cdot n + n,$$

sono limitate superiormente o inferiormente, e in tal caso calcolarne estremo superiore ed estremo inferiore.

Sol. Abbiamo $a_n = \log\left(\frac{n+1+2}{n+1}\right) = \log\left(1 + \frac{2}{n+1}\right)$: poiché la funzione (reale) $y = \log(x)$ è monotona strettamente crescente e la successione $\left\{1 + \frac{2}{n+1}\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona strettamente decrescente (infatti, $\forall n < m$ in $\mathbb{N}$

$$\text{si ha } n+1 < m+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} > \frac{1}{m+1} \Rightarrow 1 + \frac{2}{n+1} > 1 + \frac{2}{m+1},$$

segue che la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è monotona strettamente decrescente,

ed è quindi limitata superiormente da $a_0 = \log(3)$, che è l'estremo superiore (e il massimo) di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Inoltre, $\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo

$$1 + \frac{2}{n+1} > 1 \Rightarrow \log\left(1 + \frac{2}{n+1}\right) = a_n > \log(1) = 0:$$

18
dunque $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è anche limitata inferiormente.

Verifichiamo che $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$: dobbiamo cioè mostrare che $\forall \varepsilon > 0$

$\exists \nu_\varepsilon$ t.c. $\forall n > \nu_\varepsilon \quad |a_n - 0| < \varepsilon$. Per $\varepsilon > 0$ fissato, essendo

$$|a_n - 0| = \left| \log\left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \right| = \log\left(1 + \frac{2}{n+1}\right) \quad \text{abbiamo}$$

$$\log\left(1 + \frac{2}{n+1}\right) < \varepsilon \iff 1 + \frac{2}{n+1} < e^\varepsilon \iff \frac{2}{n+1} < \underbrace{e^\varepsilon - 1}_{> 0 \text{ perché } e^\varepsilon > 1 \text{ per } \varepsilon > 0}$$

$$\iff n+1 > \frac{2}{e^\varepsilon - 1} \iff n > \frac{2}{e^\varepsilon - 1} - 1$$

$$\Rightarrow \text{basta porre } \nu_\varepsilon = \frac{2}{e^\varepsilon - 1} - 1 \quad \left(\text{o } \nu_\varepsilon = \left\lceil \frac{2}{e^\varepsilon - 1} - 1 \right\rceil + 1 \text{ se si vuole } \nu_\varepsilon \in \mathbb{N} \right).$$

Quindi l'estremo inferiore di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è 0 (e non esiste il minimo di $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, perché $a_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow 0 \notin \{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$).

Invece, per quanto riguarda la successione $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, abbiamo:

$$b_n = \frac{1}{n^2 + 1} + (-1)^n \cdot n + n = \begin{cases} \frac{1}{n^2 + 1} + 2n & \text{se } n \text{ è pari} \\ \frac{1}{n^2 + 1} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ in particolare, $b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è limitata inferiormente.

Osserviamo poi che la sottosuccessione $\left\{ \frac{1}{n^2 + 1} + 2n \right\}_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \text{ pari}}}$ diverge a $+\infty$

(perché $\frac{1}{n^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ e $2n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$) $\Rightarrow \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ è illimitata superiormente,

ossia $\sup \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = +\infty$. Mostriamo che $\inf \{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} = 0$: poiché già sappiamo

che $b_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$, è sufficiente mostrare che $\forall \varepsilon > 0$ fissato $\exists n \in \mathbb{N}$ t.c.

$0 < b_n < \varepsilon$: a tal fine, fissato un $\varepsilon > 0$, è sufficiente prendere n dispari

t.c. $\frac{1}{n^2 + 1} < \varepsilon$, ossia t.c. $n^2 > \frac{1}{\varepsilon} - 1$: se $\varepsilon \geq 1$ ciò è vero $\forall n$ dispari, se $0 < \varepsilon < 1$

basta prendere n dispari t.c. $n > \sqrt{\frac{1}{\varepsilon} - 1}$.

Per concludere, osserviamo che l'esistenza di due sottosuccessioni di $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ con comportamenti diversi per $n \rightarrow +\infty$ (la sottosuccessione data dagli n pari diverge a $+\infty$, la sottosuccessione data dagli n dispari converge a 0) implica che $\nexists \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.

Per casa: Stabilire se la successione $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, con $a_n = (-1)^n \cdot \frac{5n+1}{n^2}$, è superiormente o inferiormente limitata. Calcolare in tal caso estremo superiore e inferiore e stabilire se si tratta di massimo e minimo.

- 8) Verificare, usando la definizione di limite, che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n^2+2} = 0$ mentre $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\log(n) \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right| \right)$ non esiste.

Sol. i) Posto $a_n := \frac{n}{n^2+2}$, dobbiamo verificare che $\forall \varepsilon > 0 \exists \nu_\varepsilon$ t.c.

$\forall n > \nu_\varepsilon \quad |a_n - 0| < \varepsilon$. Osserviamo che $\forall n \in \mathbb{N} \quad |a_n| = a_n$ e
 $0 < \frac{n}{n^2+2} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n} \Rightarrow$ per $\varepsilon > 0$ fissato, è sufficiente prendere n t.c. $\frac{1}{n} < \varepsilon \quad (\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon})$ per avere $0 < a_n < \varepsilon$.
 $\Rightarrow \nu_\varepsilon := \frac{1}{\varepsilon}$, oppure $\nu_\varepsilon := \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil + 1$ se si vuole $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}$

ii) Se esistesse $\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(n) \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right| = l \in \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0$ dovrebbe

esistere ν_ε t.c. $|b_n - l| < \varepsilon \quad \forall n > \nu_\varepsilon$, con $b_n := \log(n) \cdot \left| \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) \right|$:

questo è impossibile, perché per n dispari si ha $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \pm 1 \Rightarrow b_n = \log(n)$, e la successione $\{\log(n)\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ diverge a $+\infty \Rightarrow$ non si può avere $|\log(n) - l| < \varepsilon$

definitivamente per n dispari. Se invece $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$ divergesse, dovrebbe

divergere a $+\infty$, perché $b_n > 0 \quad \forall n \geq 2$: in tal caso, $\forall M > 0$ "grande a piacere"

dovrebbe esistere $\nu_n > 0$ t.c. $\forall n > \nu_M$ $b_n > M$: ma anche questo è assurdo,

perché $\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = 0 \ \forall n \text{ pari} \Rightarrow b_n = 0 \ \forall n \text{ pari}.$