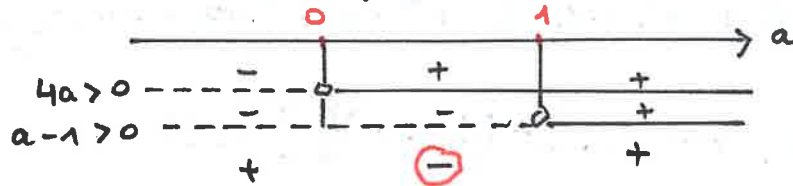


PARTI I: ANCORA ESERCIZI SU sup/inf/max/min

Dati i seguenti sottoinsiemi $S \subseteq \mathbb{R}$, determinarne sup e inf e stabilire se si tratta di max e min.

1) $S = \{a \in \mathbb{R} : \log(x^2 - 2ax + a) \text{ è definita su tutto } \mathbb{R}\}.$

Sol. Perché la funzione $f(x) = \log(x^2 - 2ax + a)$ sia definita $\forall x \in \mathbb{R}$ si deve avere $x^2 - 2ax + a > 0 \forall x \in \mathbb{R}$; poiché il polinomio $g(x) = x^2 - 2ax + a$ rappresenta una parabola con la concavità verso l'alto, ciò si verifica se e solo se $\Delta = 4a^2 - 4a = 4a(a-1) < 0$:



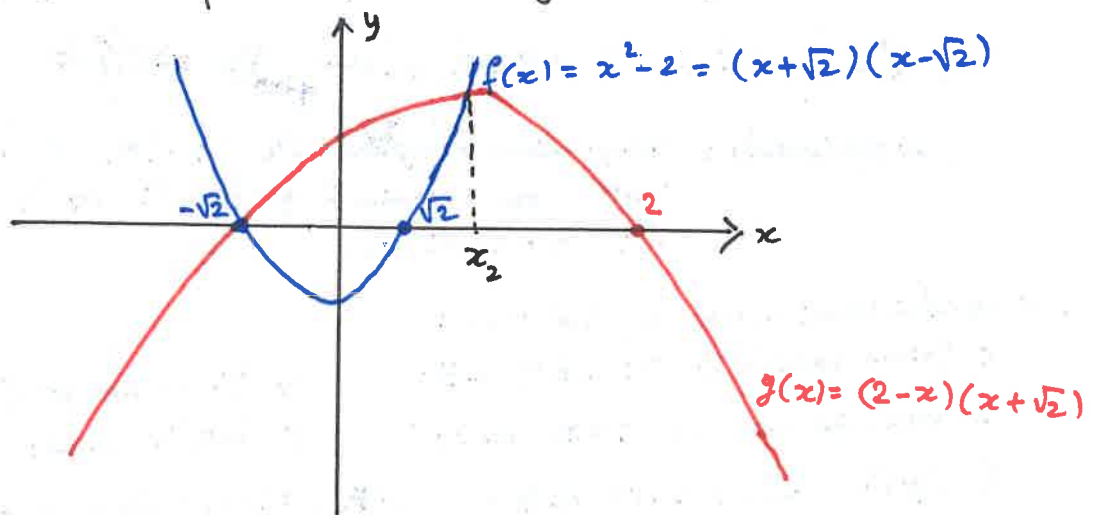
$\Rightarrow S = (0, 1)$, da cui ricaviamo che $\sup(S) = 1$, $\inf(S) = 0$ e non esistono $\max(S)$ e $\min(S)$.

2) $S = \{x \in \mathbb{R} : \frac{2x+1}{x-2} - \frac{5}{2(x+2)} < \frac{1}{2}\}.$

Sol. In questo caso è sufficiente risolvere la disequazione: si ottiene con $S = (-2, 2)$, da cui $\sup(S) = 2$, $\inf(S) = -2$ e $\nexists \max(S), \min(S)$.

3) $S = \{x \in \mathbb{Q} : x \geq -1 \text{ e } x^2 - 2 \leq (2-x)(x+\sqrt{2})\}.$

Sol. Per $x \in \mathbb{R}$, i polinomi $f(x) = x^2 - 2$ e $g(x) = (2-x)(x+\sqrt{2})$ rappresentano delle parabole, come nel grafico seguente:



La soluzione in $\mathbb{R}$ di $f(x) \leq g(x)$ è dunque data dall'intervallo $[-\sqrt{2}, x_2]$,
dove x_2 è la soluzione $\neq -\sqrt{2}$ di

$$(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2}) = (2 - x)(x + \sqrt{2}),$$

ossia è l'unica soluzione di

$$x - \sqrt{2} = 2 - x,$$

ossia

$$2x = 2 + \sqrt{2} :$$

$$\Rightarrow x_2 = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2},$$

e ricaviamo che

$$S = \left\{ x \in \mathbb{Q} : x \geq -1 \text{ e } x^2 - 2 \leq (2 - x)(x + \sqrt{2}) \right\} =$$

$$= [-1, +\infty) \cap \left[-\sqrt{2}, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cap \mathbb{Q} =$$

$$= \left[-1, 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \cap \mathbb{Q}.$$

Segue che $\sup(S) = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\inf(S) = -1$, e poiché $-1 \in \mathbb{Q}$ ma $1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \notin \mathbb{Q}$ (altrimenti $2 \cdot (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}) - 2 = \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$, assurdo)

concludiamo che $\min(S) = -1$, ma non esiste $\max(S)$.

Per casa

- Trovare $\sup/\inf$ dei seguenti sottoinsiemi $S \subseteq \mathbb{R}$ e stabilire se si tratta di $\max$ e $\min$:

$$1) S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ e } |3x + 1| \geq |2 - 2x| \right\}$$

$$2) S = \left\{ a \in \mathbb{R} : a - a|x| \leq |x - 1| \forall x \in \mathbb{R} \right\}$$

(Suggerimento: confrontare graficamente $1 - |x|$ e $|x - 1|$, e capire come varia il grafico di $a \cdot (1 - |x|)$ a seconda dei valori di a .)

- Dai vecchi temi d'esame, risolvere:

1) Primo parziale 2018: DRM n. 5;

2) Gennaio 2022: DRM n. 7;

3) Agosto 2022: DRM n. 3;

4) Novembre 2025: DRM n. 2;

5) Luglio 2026: DRM n. 1

(DRM = Domande a risposta multipla)

PARTE II: NUMERI COMPLESSI

Richiami di teoria

- Il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi è l'insieme

$$\mathbb{R}^2 = \{ (a, b) : a, b \in \mathbb{R} \}$$

dotato della somma

$$(a, b) + (c, d) := (a + c, b + d) \quad \text{Somma in } \mathbb{R}$$

e del prodotto

$$(a, b) \cdot (c, d) := (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \quad \text{Prodotto, somma e differenza in } \mathbb{R}$$

che si dimostrano soddisfare proprietà analoghe a quelle di $+$ e $\cdot$ in $\mathbb{R}$ (associatività, commutatività, ...).

- L'elemento $(0, 1)$ soddisfa allora

$$(0, 1) \cdot (0, 1) = (0 - 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0)$$

e viene indicato con $(0, 1) := i$ e chiamato "unità immaginaria".

- Gli elementi di $\mathbb{C}$ della forma $(a, 0)$, con $a \in \mathbb{R}$, soddisfano le seguenti proprietà:

→ cioè i punti corrispondenti all'asse x in $\mathbb{R}^2$

$$i) (a, 0) + (b, 0) = (a + b, 0)$$

$$ii) (a, 0) \cdot (b, 0) = (a \cdot b - 0, a \cdot 0 + 0 \cdot b) = (a \cdot b, 0)$$

⇒ il sottoinsieme $\{ (a, 0) : a \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{C}$ è chiuso per somme e prodotti:

identifichiamo tale sottoinsieme con la retta reale $\mathbb{R}$, cioè pensiamo

$\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$ identificando $a \in \mathbb{R}$ con il numero complesso $(a, 0) \in \mathbb{C}$.

Oss. Con tale identificazione, si ha per l'unità immaginaria l'equazione

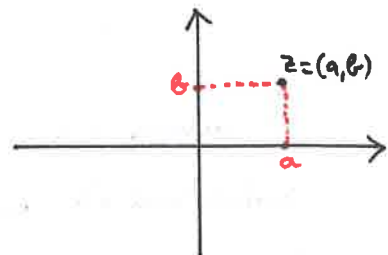
$$\underline{i^2 = -1}.$$

- Per ogni $z = (a, b) \in \mathbb{C}$ chiamiamo

$$a := \text{parte reale di } z: \quad a := \operatorname{Re}(z)$$

$$b := \text{parte immaginaria di } z: \quad b := \operatorname{Im}(z)$$

Chiameremo l'asse x asse reale del piano complesso e l'asse y asse immaginario.



- Forma algebrica di un numero complesso: dato $z \in \mathbb{C}$ con $\text{Re}(z) = a$, $\text{Im}(z) = b$:

$$\begin{aligned} a + i \cdot b &= (a, 0) + (0, 1) \cdot (b, 0) = \\ &= (a, 0) + (0 \cdot b - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot b) = \\ &= (a, 0) + (0, b) = \\ &= (a, b) = z \end{aligned}$$

la scrittura $z = a + ib$ si chiama forma algebrica del numero complesso z .

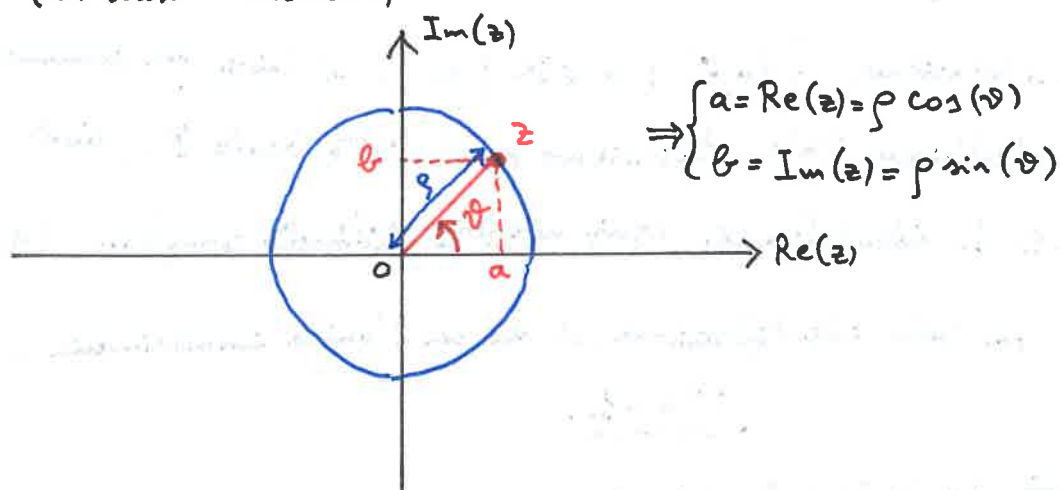
Dati due numeri complessi $z = a + ib$, $w = c + id$ scritti in forma algebrica, otteniamo la loro somma e il loro prodotto come:

$$\begin{aligned} \bullet \quad z + w &= (a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d) \\ \bullet \quad z \cdot w &= (a + ib) \cdot (c + id) = (a \cdot c - b \cdot d) + i(a \cdot d + b \cdot c) \end{aligned}$$

ossia "trattando $z = a + ib$ e $w = c + id$ come se fossero polinomi nella variabile i , sfruttando l'identità $i^2 = -1$ ".

- Forma trigonometrica di un numero complesso: dato $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, scritto in forma

algebrica $z = a + ib$, osserviamo che z giace sulla circonferenza di centro O e raggio $\rho := \sqrt{a^2 + b^2}$ nel piano complesso, e forma con l'asse reale un angolo ϑ (in senso antiorario)



Il numero reale (positivo) $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ viene chiamato modulo di z , e viene anche indicato con $|z|$. Quando $z = 0$, poniamo ovviamente $|0| = 0$.

La scrittura di $z = a + ib$ in termini di $\rho = |z|$ e ϑ

$$z = \rho \cos(\vartheta) + i \cdot \rho \sin(\vartheta) = \rho (\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta))$$

viene chiamata forma trigonometrica del numero complesso z .

Si noti che l'angolo ϑ non è unico: se $z = \rho [\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)]$ e

$\varphi := \vartheta + 2k\pi$ (con $k \in \mathbb{Z}$), si ha infatti

$$\begin{aligned} \rho [\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)] &= \rho [\cos(\vartheta + 2k\pi) + i \sin(\vartheta + 2k\pi)] = \\ &= \rho [\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)] = \\ &= z \end{aligned}$$

(essendo le funzioni coseno e seno periodiche di periodo 2π).

Def. Ogni valore di ϑ per il quale $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ si scrive come $z = \rho [\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)]$ viene chiamato argomento di z . Seguendo la convenzione che avete usato a lezione, chiameremo argomento principale di z l'unico suo argomento appartenente all'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$; indicheremo l'argomento principale con $\arg(z)$.

Come passare da forma algebrica a forma trigonometrica: dato $z = a + ib \neq 0$

scritto in forma algebrica, abbiamo $z = \rho [\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)]$ con

$\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e ricaviamo un possibile valore di ϑ così:

o) Se $a \neq 0$: abbiamo $\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)} = \frac{b}{a} = \frac{\rho \sin(\vartheta)}{\rho \cos(\vartheta)} = \tan(\vartheta)$

$$\Rightarrow \arg(z) = \vartheta = \begin{cases} \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) & \text{se } z \text{ è nel I o nel IV quadrante del piano complesso} \\ \arctan\left(\frac{\operatorname{Im}(z)}{\operatorname{Re}(z)}\right) + \pi & \text{se } z \text{ è nel II o nel III quadrante} \end{cases}$$

(ricordando che $\forall \vartheta \arctan(\vartheta) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$);

o) Se $a = 0$, si ha $z = ib$ (con $b \neq 0$), ossia z è puramente immaginario:

abbiamo in tal caso $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ se $b > 0$ e $\vartheta = -\frac{\pi}{2}$ (o $\vartheta = \frac{3\pi}{2}$) se $b < 0$.

• Forma esponenziale di un numero complesso: dato $z = a + ib = \rho [\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)]$,

la forma esponenziale di z è la scrittura $z = \rho e^{i\vartheta}$. Tale scrittura non è puramente formale; discende dal teorema di Eulero $e^{i\vartheta} = \cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)$, che sfrutta l'esponenziale complesso $e^z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ (non approfondiamo i dettagli).

- Coniugato di un numero complesso: dato $z = a + ib \in \mathbb{C}$, il numero complesso $\bar{z} := a - ib$ dato da $\operatorname{Re}(\bar{z}) = \operatorname{Re}(z)$ e $\operatorname{Im}(\bar{z}) = -\operatorname{Im}(z)$ viene chiamato il coniugato di z .

In forma trigonometrica: se $z = \rho [\cos(\vartheta) + i \sin(\vartheta)] =$
 $= \underbrace{\rho \cos(\vartheta)}_{= \operatorname{Re}(z)} + i \cdot \underbrace{\rho \sin(\vartheta)}_{= \operatorname{Im}(z)},$

si ha

$$\bar{z} = \rho \cos(\vartheta) - i \rho \sin(\vartheta) = \rho [\cos(\vartheta) - i \sin(\vartheta)] =$$

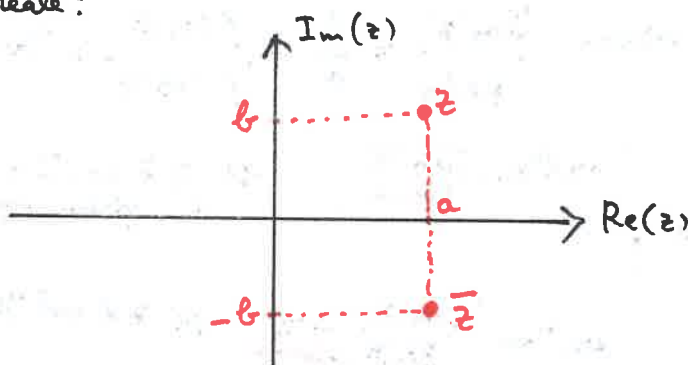
$$= \rho [\cos(-\vartheta) + i \sin(-\vartheta)]$$

La funzione coseno è pari $\Rightarrow \cos(-\vartheta) = \cos(\vartheta)$,
 la funzione seno è dispari $\Rightarrow \sin(-\vartheta) = -\sin(\vartheta)$.

$\Rightarrow$ vale $|\bar{z}| = |z|$, e se ϑ è un argomento di z allora $-\vartheta$ è un argomento di $\bar{z}$.

Quindi, in forma esponenziale, se $z = \rho e^{i\vartheta}$ si ha $\bar{z} = \rho e^{-i\vartheta}$.

Geometricamente, il coniugato di un numero complesso è il suo punto simmetrico rispetto all'asse reale:



Proprietà di coniugato e modulo: dato $z = a + ib = \operatorname{Re}(z) + i \operatorname{Im}(z) \in \mathbb{C}$:

- 1) $z = \bar{z} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$
- 2) $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \Rightarrow \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}$
- 3) $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \Rightarrow \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$
- 4) $z \cdot \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$
 $\Rightarrow$ se $z \neq 0$, $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ ($\Rightarrow$ In forma esponenziale: se $z = \rho e^{i\vartheta} \neq 0$ vale $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{\rho e^{-i\vartheta}}{\rho^2} = \frac{1}{\rho} e^{-i\vartheta}$)
- 5) $|\bar{z}| = |z|$ e $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- 6) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

Esercizi

• Sulla forma algebrica:

1) Esprimere in forma algebrica $z = (2+3i)^2$ e $z = \frac{3-i}{3+i}$

Sol. (i) $z = (2+3i)^2 = 4 + 12i + (3i)^2 = 4 - 9 + 12i = -5 + 12i$

(ii) $z = \frac{3-i}{3+i} = \frac{3-i}{3+i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{(3-i)^2}{3^2 - (i)^2} = \frac{9 - 6i - 1}{9 + 1} = \frac{8 - 6i}{10} = \frac{4}{5} - \frac{3}{5}i$

Per casa: esprimere in forma algebrica $z = \frac{(1+i)^2}{1-i}$ [Sol: $z = -1+i$]

2) (Potenze di i). Studiare le potenze i^m al variare di $m \in \mathbb{N}$ e calcolare esplicitamente i^{22} e i^{1361} .

Sol. Per $m = 0, 1, 2, 3$: $i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$;

Poi, per $m \geq 4$, il ciclo si ripete:

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$, $i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1$, $i^7 = i^4 \cdot i^3 = 1 \cdot (-i) = -i$, etc.

$\Rightarrow$ In generale, scrivendo $n = 4k + r$ con $k \in \mathbb{N}$ e $r \in \{0, 1, 2, 3\}$

$\hookrightarrow$ DIVISIONE EUCLIDEA di n per 4

$\hookrightarrow r$ è il RESTO della divisione per 4

si ha $i^n = i^{4k+r} = (i^4)^k \cdot i^r = (1)^k \cdot i^r = i^r$

Dunque, poiché $22 = 5 \cdot 4 + 2$, si ha $i^{22} = i^2 = -1$, e

similmente, poiché $1361 = 340 \cdot 4 + 1$, si ha $i^{1361} = i^1 = i$.

Per casa: Calcolare $(-i)^{467}$ e $i^{354288175432119}$

Inoltre, per quanto riguarda le potenze negative:

$i^{-1} = \frac{1}{i} = \frac{\bar{i}}{|i|^2} = \frac{-i}{1^2} = -i$

Per casa: dedurre, da quanto fatto sopra per le potenze i^m con $m \in \mathbb{N}$, l'espressione di i^m con $m \in \mathbb{Z}$, $m < 0$.

3) Calcolare il modulo di $z = -2i(3+i)(2+4i)(1+i)$.

Sol. Poiché $|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$, calcoliamo

$$\begin{aligned}
 |-2i \cdot (3+i)(2+4i)(1+i)| &= |-2i| \cdot |3+i| \cdot |2+4i| \cdot |1+i| = \\
 &= \underbrace{|-2i|}_{=2 \cdot 1 = 2} \cdot \underbrace{|3+i|}_{=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}} \cdot \underbrace{|2+4i|}_{=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}} \cdot \underbrace{|1+i|}_{=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}} = \\
 &= 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} \cdot 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{2} = 8 \cdot 5 = 40.
 \end{aligned}$$

Per casa: Calcolare il modulo di $z = \frac{(3+4i)(-1+2i)}{(-1-i)(3-i)}$ [Sol. $|z| = \frac{5}{2}$]

4) Risolvere in $\mathbb{C}$, usando la scrittura in forma algebrica, l'equazione

$$z \cdot \bar{z} - z + \frac{i}{4} = 0.$$

Sol. Scriviamo $z = a + ib$: si ha allora $z \cdot \bar{z} = |z|^2 = a^2 + b^2$, e l'equazione diventa

$$a^2 + b^2 - a - ib + \frac{i}{4} = 0$$

$$(a^2 + b^2 - a) + i\left(\frac{1}{4} - b\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - a = 0 \\ \frac{1}{4} - b = 0 \end{cases}$$

Ricaviamo perciò $b = \frac{1}{4}$, che sostituito nella prima equazione del sistema dà

$$a^2 - a + \frac{1}{16} = 0$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow a_{1,2} &= \frac{+1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot \frac{1}{16}}}{2} = \begin{cases} a_1 = \frac{1 - \sqrt{\frac{3}{4}}}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4} \\ a_2 = \frac{1 + \sqrt{\frac{3}{4}}}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Quindi le soluzioni dell'equazione data sono, in forma algebrica:

$$\underline{z_1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{4}i} \quad \text{e} \quad \underline{z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{1}{4}i}.$$

Per casa: risolvere allo stesso modo l'equazione $z^2 + z + 1 = 0$.

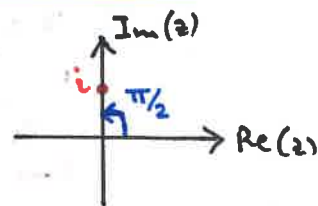
• Sulla forma trigonometrica ed esponenziale

5) Scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale i numeri complessi

$$z = i \quad \text{e} \quad z = \frac{1}{-3+3i}$$

Sol. (i) Per $z=i$ si ha $|i|=1$ e $\arg(z)=\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow i = 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] = 1 \cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$



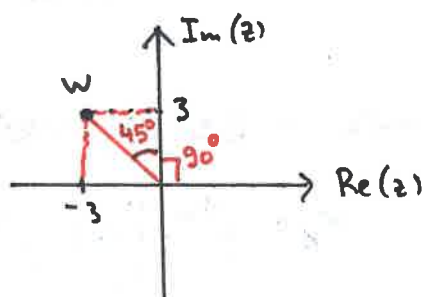
ii) Per $z = \frac{1}{-3+3i}$, una tecnica possibile è vederlo come reciproco di $w = -3+3i$

(cioè $z = \frac{1}{w}$): $|w| = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{9 \cdot 2} = 3\sqrt{2}$; inoltre

$$\arg(w) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

$$\Rightarrow w = 3\sqrt{2} \cdot e^{i\frac{3\pi}{4}} =$$

$$= 3\sqrt{2} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]$$



Dunque

$$z = \frac{1}{w} = \frac{\bar{w}}{|w|^2} = \frac{3\sqrt{2} \cdot \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right]}{(3\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - i \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \right] =$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} \left[\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right] \quad (\text{forma trigonometrica})$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{2}} e^{-i\frac{3\pi}{4}} \quad (\text{forma esponenziale}).$$

Per casa: scrivere in forma trigonometrica ed esponenziale

$$z = 1+i, \quad z = \frac{4i}{\sqrt{3}+i}, \quad z = \frac{1+i}{2-2i}$$

6) Dato $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, calcolare z^6 e z^{22} .

Sol. Per calcolare le potenze z^n , ricordiamo la FORMULA DI DE MOIVRE:

Se $z = \rho [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$, si ha $\forall n \in \mathbb{N}$

$$z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \sin(n\theta)]$$

(in forma esponenziale: $z = \rho e^{i\theta} \Rightarrow z^n = \rho^n e^{in\theta}$)

Corollario (RADICI n-ESIME): Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, un numero complesso

$$z = \rho [\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$$

esattamente n radici n -esime in $\mathbb{C}$, date da

Cioè numeri $w \in \mathbb{C}$
t.c. $w^n = z$

$$w_k = \rho^{1/n} \left[\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i \sin\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) \right]$$

per $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Nel nostro caso, per $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$, abbiamo $|z| = 1$ e $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ e $-\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

$$\Rightarrow z = 1 \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \right]$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z^6 &= 1^6 \cdot \left[\cos\left(6 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) + i \sin\left(6 \cdot \left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) \right] = \\ &= \underbrace{\cos(-\pi)}_{=-1} + i \underbrace{\sin(-\pi)}_{=0} = -1 \end{aligned}$$

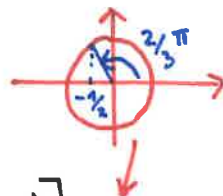
Sfruttando il punto precedente

$$z^{22} = z^{18+4} = z^{3 \cdot 6} \cdot z^4 = (z^6)^3 \cdot z^4 = (-1)^3 \cdot z^4 = -z^4 =$$

$$= -1^4 \cdot \left[\cos\left(-\frac{\pi}{6} \cdot 4\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{6} \cdot 4\right) \right] =$$

$$= - \left[\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i \sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right) \right] = - \left[\cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) - i \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) \right] =$$

$$= - \left[-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = 1 \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right] = e^{\frac{\pi}{3}i}$$



Percorso: Calcolare z^6 e z^{22} per $z = \frac{4i}{\sqrt{3}+i}$

7) Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $\frac{i}{z^2} = (1+i) \cdot \bar{z} \cdot |z|$.

Sol. Perché l'equazione abbia senso deve essere $z \neq 0$. Poniamo $z = \rho e^{i\theta}$; in forma esponenziale, $i = e^{i\pi/2}$ e $1+i = \sqrt{2} e^{i\pi/4}$

$\Rightarrow$ l'equazione diventa

$$\frac{e^{i\pi/2}}{\rho^2 e^{2i\theta}} = \sqrt{2} e^{i\pi/4} \cdot \rho e^{-i\theta} \cdot \rho$$

$$e^{i(\frac{\pi}{2}-2\theta)} = \sqrt{2} \rho^4 \cdot e^{i(\frac{\pi}{4}-\theta)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sqrt{2} \rho^4 = 1 \\ \frac{\pi}{2} - 2\theta = \frac{\pi}{4} - \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (\text{equazioni in } \mathbb{R}).$$

L'equazione $\sqrt{2} \rho^4 = 1$, ossia $\rho^4 = 2^{-1/2}$, essendo $\rho > 0$ ammette l'unica soluzione $\rho = 2^{-1/8}$;

la seconda equazione dà

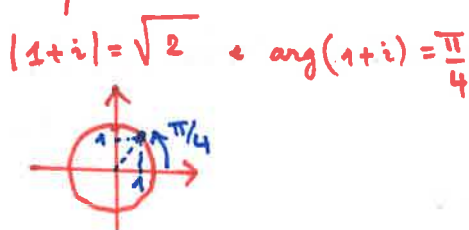
$$\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z = 2^{-1/8} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right) \right] =$$

$$= 2^{-1/8} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{1}{2^{1/8}} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{2}} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \right] =$$

$$= \frac{1}{2^{1/8}} \cdot \frac{1}{2^{1/2}} (1+i) = \frac{1}{2^{5/8}} \cdot (1+i) = \frac{1+i}{\sqrt[8]{2^5}}.$$

(In forma esponenziale, $z = \frac{1}{2^{1/8}} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = \frac{e^{i\pi/4}}{\sqrt[8]{2}}.$)



Per casa: Risolvere in $\mathbb{C}$ le equazioni:

1) $(z-2)^3 = -i$

2) $z^2 = \bar{z}^3$

3) $(z + \bar{z}) \cdot \left(\frac{1}{z} + 2z^2 - i\sqrt{3} \cdot \frac{\bar{z}}{z} \right) = 0$

4) $z^2 + \frac{i}{z^2} = -\frac{\bar{z}^2}{2}$

8) (Dalla I prova in itinere 2018). L'insieme delle soluzioni in $\mathbb{C}$ di

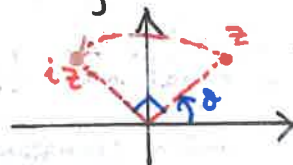
$$\arg(iz) = \frac{7}{6}\pi$$

è:

- (a) una circonferenza;
- (b) una retta privata dell'origine; (sic)
- (c) una semiretta contenuta nel IV quadrante;
- (d) una semiretta contenuta nel II quadrante.

Sol. La moltiplicazione per i in $\mathbb{C}$ corrisponde ad una rotazione di $\frac{\pi}{2}$ ($= 90^\circ$) in senso antiorario: infatti, se $z = \rho e^{i\theta}$, si ha $i \cdot z = e^{i\pi/2} \cdot \rho e^{i\theta} =$

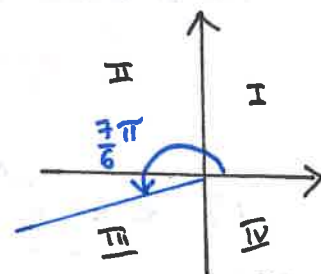
$$= \rho e^{i(\theta + \pi/2)} \Rightarrow \text{il modulo non cambia e } z \text{ ruota di } \frac{\pi}{2} \text{ in senso antiorario}$$



Noi vogliamo capire che insieme è l'insieme

$$A = \{ z \in \mathbb{C} : \arg(iz) = \frac{7}{6}\pi \}$$

per avere $\arg(iz) = \frac{7}{6}\pi$, iz deve trovarsi nel III quadrante

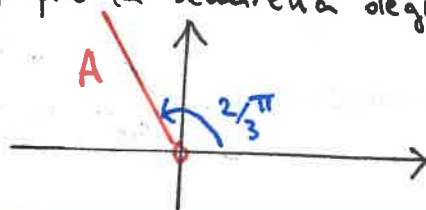


$\Rightarrow$ per avere iz nel III quadrante avendo ruotato z di $\frac{\pi}{2}$, significa che z si trovava nel II quadrante

$\Rightarrow$ la risposta giusta è la (d).

In effetti, è facile vedere che A è proprio la semiretta degli $z \in \mathbb{C}$ t.c.

$$\arg(z) = \frac{7}{6}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{2}{3}\pi$$



9) (Dalla I prova in itinere 2018). Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$(z + \bar{z}) \cdot (z^6 + 11i) = 0$$

e rappresentare le soluzioni nel piano complesso.

Sol. Studiamo separatamente $z + \bar{z} = 0$ e $z^6 + 11i = 0$:

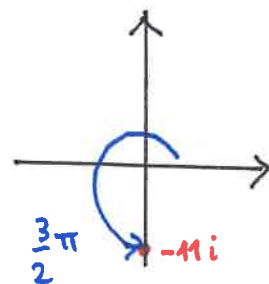
•) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z) = 0 \iff \operatorname{Re}(z) = 0 \iff z$ è puramente immaginario

•) $z^6 + 11i = 0 \iff z^6 = -11i$: le soluzioni sono tutte le radici seste di $w = -11i$.

Scriviamo w in forma trigonometrica:

$$|w| = |-11i| = 11, \quad \arg(w) = \frac{3}{2}\pi$$

$$\Rightarrow w = 11 \cdot \left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \right]$$



Quindi, da De Moivre, le radici seste di w sono date da

$$\begin{aligned} z_k &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\frac{3}{2}\pi + 2k\pi}{6}\right) \right] = \\ &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}\right) \right] \end{aligned}$$

con $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$:

$$z_0 = \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right];$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) \right] = \\ &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_2 &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) \right] = \\ &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{11\pi}{12}\right) \right]; \end{aligned}$$

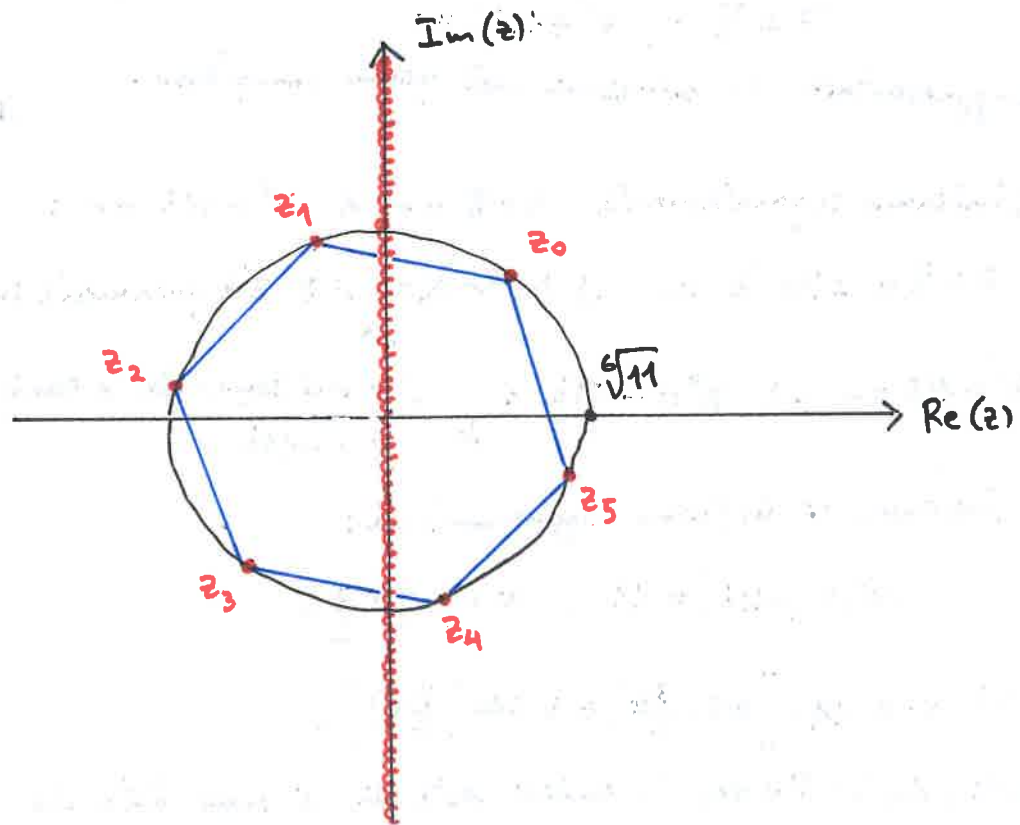
$$\begin{aligned} z_3 &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) \right] = \\ &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_4 &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{3}\right) \right] = \\ &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{19\pi}{12}\right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_5 &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{5\pi}{3}\right) \right] = \\ &= \sqrt[6]{11} \cdot \left[\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{23\pi}{12}\right) \right]. \end{aligned}$$

Come è noto dalla teoria, esse si dispongono a formare i vertici di un esagono regolare inscritto nella circonferenza di raggio $\sqrt[6]{11}$ centrata nell'origine, nel piano complesso.

Le soluzioni dell'equazione data, nel piano complesso, sono perciò:



Per casa: svolgere tutti gli esercizi sui numeri complessi nelle seguenti prove in itinere:

- 1) I compito 2017
- 2) I compito 2019
- 3) I compito 2022