

Soluzione di alcuni esercizi assegnati

1) $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ e } |3x+1| \geq |2-2x|\}$.

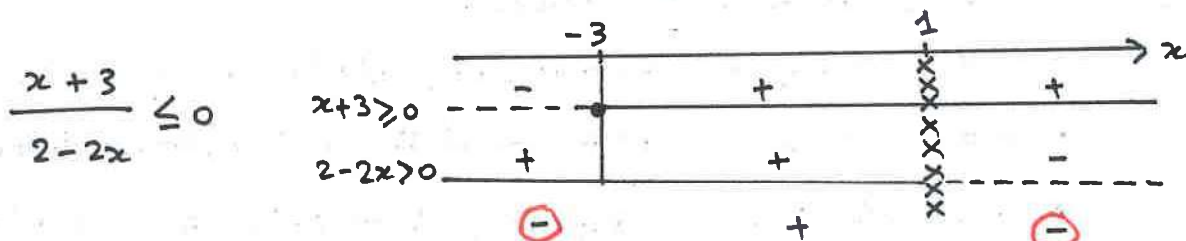
Sol. Per $x=1$, la disequazione $|3x+1| \geq |2-2x|$ diventa $4 \geq 0$, ed è dunque vera. Per $x \neq 1$, dividiamo per $|2-2x|$, ottenendo

$$\left| \frac{3x+1}{2-2x} \right| \geq 1$$

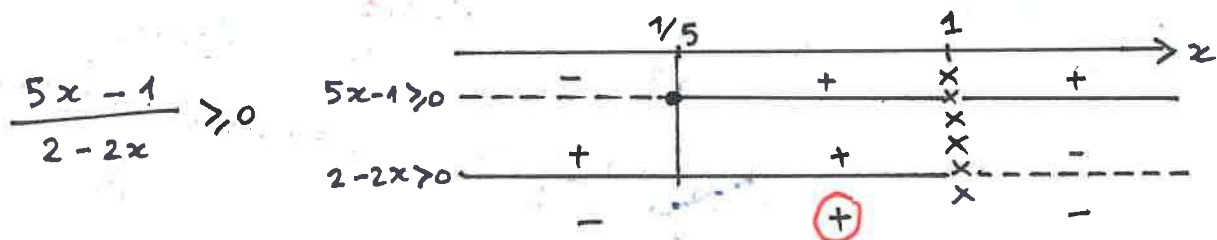
ossia

$$\frac{3x+1}{2-2x} \leq -1 \quad \vee \quad \frac{3x+1}{2-2x} \geq 1$$

•) $\frac{3x+1}{2-2x} \leq -1$ equivale a $\frac{3x+1+2-2x}{2-2x} \leq 0$, cioè



•) $\frac{3x+1}{2-2x} \geq 1$ equivale a $\frac{3x+1-2+2x}{2-2x} \geq 0$, cioè



Dunque la soluzione in $\mathbb{R}$ di $|3x+1| \geq |2-2x|$ è data da

$$\{1\} \cup (-\infty, -3] \cup (1, +\infty) \cup \left[\frac{1}{5}, 1\right) = (-\infty, -3] \cup \left[\frac{1}{5}, +\infty\right)$$

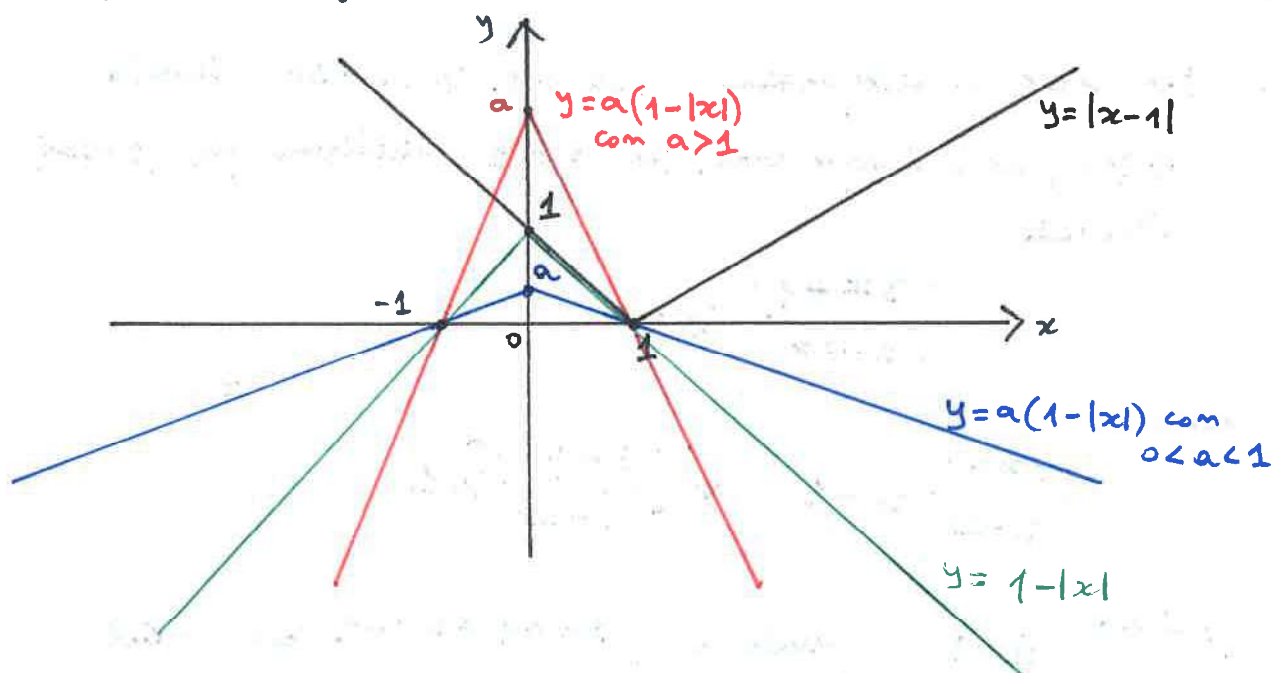
$\Rightarrow S = (-\infty, -3]$, da cui $\sup(S) = -3 = \max(S)$,

$\inf(S) = -\infty$ e $\nexists \min(S)$

(S è inferiormente illimitato).

$$2) \ S = \{ a \in \mathbb{R} : a - a|x| \leq |x-1| \ \forall x \in \mathbb{R} \}.$$

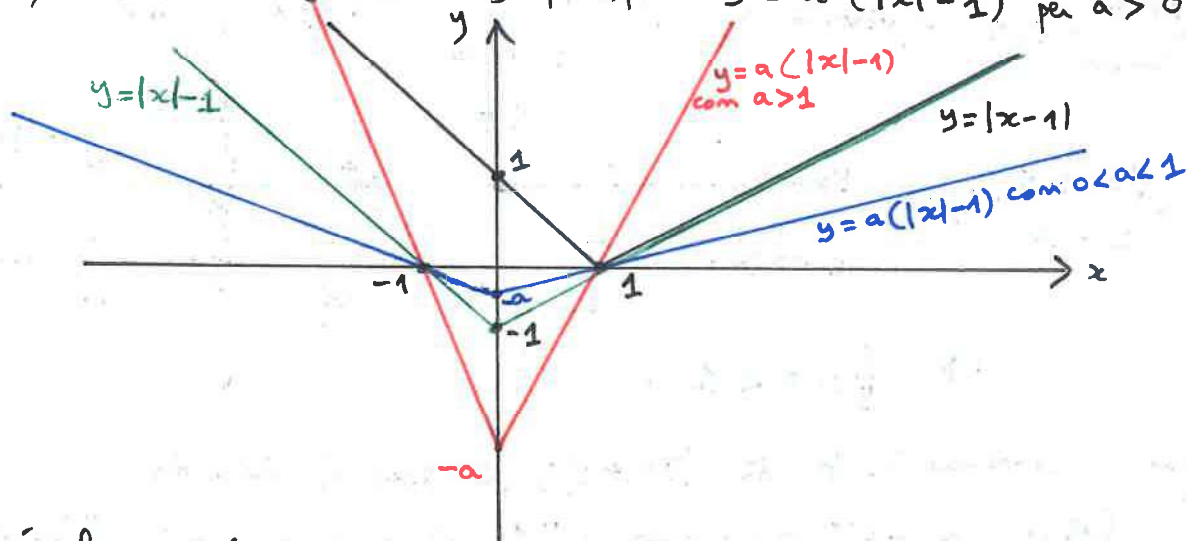
Sol. Confrontando i grafici di $y = |x-1|$ e $y = a(1-|x|)$ per $a \geq 0$:



$\Rightarrow$ perché valga $a(1-|x|) \leq |x-1| \ \forall x \in \mathbb{R}$:

-) $a = 1$ va bene (confronto fra il grafico in nero e quello in verde)
-) $a = 0$ va bene (ovvio, perché si ha $0 \leq |x-1| \ \forall x \in \mathbb{R}$)
-) $0 < a < 1$ va bene (confronto fra il grafico in nero e quello in blu)
-) $a > 1$ non va bene (" " " " " " " " rosso)

Similmente, confrontando i grafici di $y = |x-1|$ e $y = a(|x|-1)$ per $a > 0$:



$\Rightarrow$ perché valga $a(1-|x|) \leq |x-1| \ \forall x \in \mathbb{R}$ con $a < 0$ vanno bene i casi $a = -1$ (grafico verde) e $-1 < a < 0$ (grafico blu).

Dunque $S = [-1, 1]$, da cui $\sup(S) = 1 = \max(S)$ e $\inf(S) = -1 = \min(S)$.