

ESERCITAZIONE 1

(18/09/2026)

1

PARTE I: DISEQUAZIONI

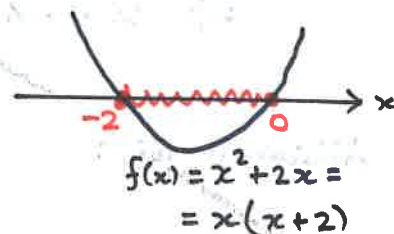
Risolvere le seguenti disequazioni nel campo reale.

1) $x + 1 > \sqrt{-x^2 - 2x}$

Sol. La condizione da imporre per l'esistenza della radice è

$$-x^2 - 2x \geq 0,$$

cioè $x(x+2) \leq 0$, che dà $-2 \leq x \leq 0$.



Inoltre, per ogni $x \in [-2, 0]$ si ha $\sqrt{-x^2 - 2x} \geq 0$, e siccome $x + 1 < 0$ per $x < -1$ segue che per $x \in [-2, -1)$ la disequazione non è soddisfatta. Similmente, è immediato vedere che non è soddisfatta in $x = -1$.

Per $x \in (-1, 0]$, entrambi i membri della disequazione sono non-negativi, e poniamo elevare al quadrato:

$$(x+1)^2 > -x^2 - 2x$$

$$x^2 + 2x + 1 > -x^2 - 2x$$

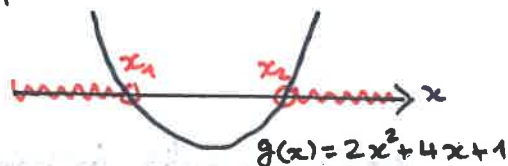
$$2x^2 + 4x + 1 > 0$$

Le soluzioni di $2x^2 + 4x + 1 = 0$ sono

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = \frac{-2 \pm \sqrt{2}}{2} = \begin{cases} x_1 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} (< -1) \\ x_2 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2} (\in (-1, 0)) \end{cases}$$

Le soluzioni in $\mathbb{R}$ di $2x^2 + 4x + 1 > 0$ sono perciò

$$x < -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \vee x > -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$



e siccome a noi interessano solo quelle comprese nell'intervallo $(-1, 0]$, concludiamo che la soluzione della disequazione di partenza è

$$-1 + \frac{\sqrt{2}}{2} < x \leq 0.$$

2)

$$\frac{\log_{1/2}(x^2-1)}{2^x - \frac{1}{2\sqrt{2}}} > 0$$

Sol. Condizione per l'esistenza del logaritmo:

$$x^2 - 1 > 0$$

$$\Rightarrow x < -1 \vee x > 1$$



$$f(x) = x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

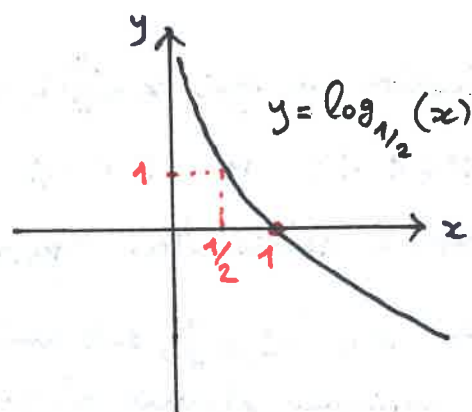
Abbiamo poi:

NUMERATORE: $\log_{1/2}(x^2-1) > 0$

⚠️ **IE**
verso cambia
perché la base
del logaritmo è < 1 !

$$x^2 - 1 < 1$$

$$x^2 < 2$$



$\Rightarrow$ in $\mathbb{R}$, le soluzioni di $x^2 < 2$ sono

$$-\sqrt{2} < x < \sqrt{2};$$

nel nostro caso, queste soluzioni andranno intersecate con $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.



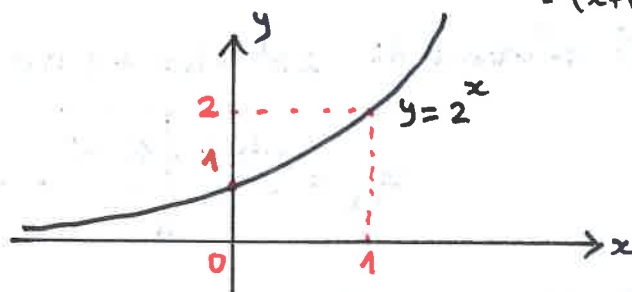
$$g(x) = x^2 - 2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$$

DENOMINATORE:

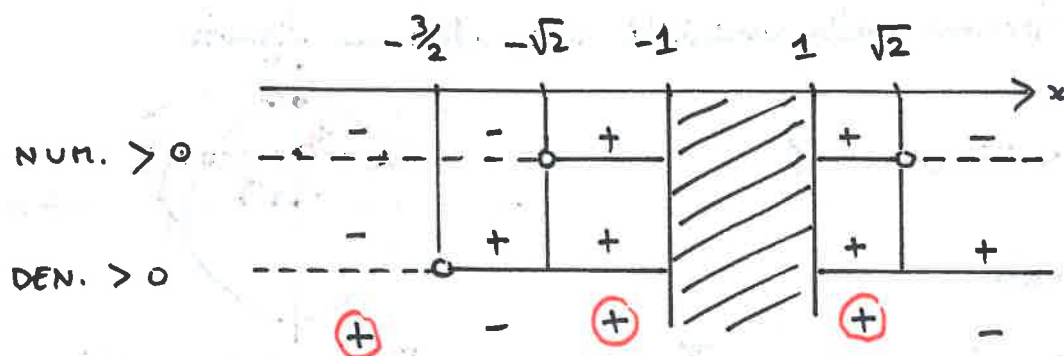
$$2^x - \frac{1}{2\sqrt{2}} > 0$$

$$2^x > 2^{-3/2}$$

$$\Rightarrow x > -\frac{3}{2} \quad (\text{soluzione in } \mathbb{R}: \text{andrà intersecata con } (-\infty, -1) \cup (1, +\infty))$$



mettendo tutto insieme, otteniamo:



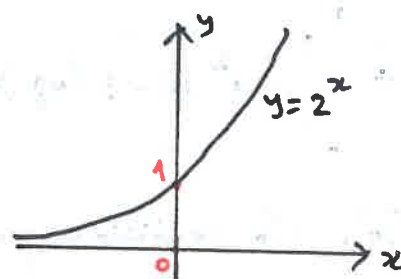
$\Rightarrow$ la soluzione della disequazione proposta è

$$x < -\frac{3}{2} \vee -\sqrt{2} < x < -1 \vee 1 < x < \sqrt{2}$$

3)
$$\frac{2 \cos^2(x) + 5 \sin(x) - 3}{2} - 4 \sin(x) > 0$$

Sol. La disequazione data è equivalente a

$$\frac{2(1 - \sin^2(x)) + 5 \sin(x) - 3}{2} > 2 \sin(x)$$



$$\Rightarrow 2 - 2 \sin^2(x) + 5 \sin(x) - 3 > 2 \sin(x) ;$$

(Il verso viene preservato perché la base (2) è > 1)

ponendo $t := \sin(x)$, tale disequazione diventa

$$-2t^2 + 3t - 1 > 0$$

$$2t^2 - 3t + 1 < 0$$

Soluzioni di $2t^2 - 3t + 1 = 0$: $t_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \begin{cases} t_1 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2} \\ t_2 = \frac{3+1}{4} = 1 \end{cases}$

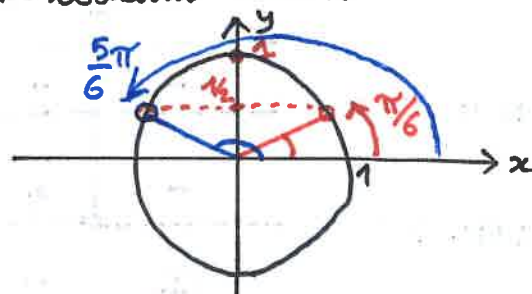
$\Rightarrow$ le soluzioni di $2t^2 - 3t + 1 < 0$ sono

$$\frac{1}{2} < t < 1$$



A noi interessa però tornare nella variabile x : abbiamo ottenuto

$$\frac{1}{2} < \sin(x) < 1$$



e sappiamo che vale

$$\bullet) \sin(x) = \frac{1}{2} \quad \text{per } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\bullet) \sin(x) = 1 \quad \text{per } x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \text{vale } \frac{1}{2} < \sin(x) < 1 \quad \text{per } \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \wedge x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \\ \text{con } k \in \mathbb{Z}$$

$$4) \sqrt{\log^2(x) - 3\log(x) + 2} > 2(\log(x) - 1)$$

N.B. Scrivendo "log" intendiamo sempre il logaritmo naturale, in base e

Sol. La condizione per l'esistenza dei logaritmi è $x > 0$.

Poniamo poi $t := \log(x)$: la disequazione diventa

$$\sqrt{t^2 - 3t + 2} > 2(t - 1)$$

Condizione per l'esistenza della radice:

$$t^2 - 3t + 2 \geq 0$$

$$(t - 1)(t - 2) \geq 0$$

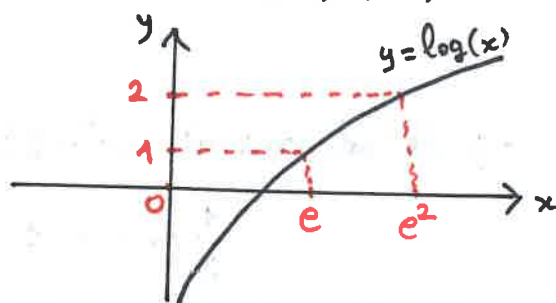
$$\Rightarrow t \leq 1 \vee t \geq 2$$



$$f(t) = t^2 - 3t + 2 = (t - 1)(t - 2)$$

Nella variabile x , ciò diventa

$$\log(x) \leq 1 \quad \vee \quad \log(x) \geq 2 \\ \underline{0 < x \leq e} \quad \quad \quad \underline{x \geq e^2}$$



15

Quindi, complessivamente, la condizione di esistenza per la disequazione di potenza è

$$0 < x \leq e \vee x \geq e^2.$$

Tornando alla variabile $t (= \log(x))$, osserviamo che per $t \leq 1$ si ha

$$\underbrace{\sqrt{t^2 - 3t + 2}}_{\geq 0, \text{ e vale } = 0 \text{ per } t = 1} > \underbrace{2(t-1)}_{\leq 0, \text{ e vale } = 0 \text{ per } t = 1}.$$

$\Rightarrow$ la disequazione è banalmente soddisfatta per $t < 1$ (cioè $0 < x < e$) e falsa per $t = 1$ (cioè $x = e$);

per $t \geq 2$, invece, entrambi i membri sono non-negativi e possiamo elevare al quadrato:

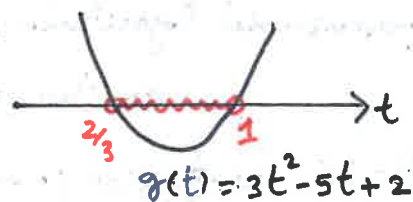
$$t^2 - 3t + 2 > 4(t-1)^2$$

$$t^2 - 3t + 2 > 4t^2 - 8t + 4$$

$$3t^2 - 5t + 2 < 0$$

Soluzioni di $3t^2 - 5t + 2 = 0$:

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \begin{cases} t_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \\ t_2 = \frac{5+1}{6} = 1 \end{cases}$$



$\Rightarrow$ si ha $3t^2 - 5t + 2 < 0$ per $\frac{2}{3} < t < 1$

che non va bene, perché siamo nell'ipotesi $t \geq 2$.

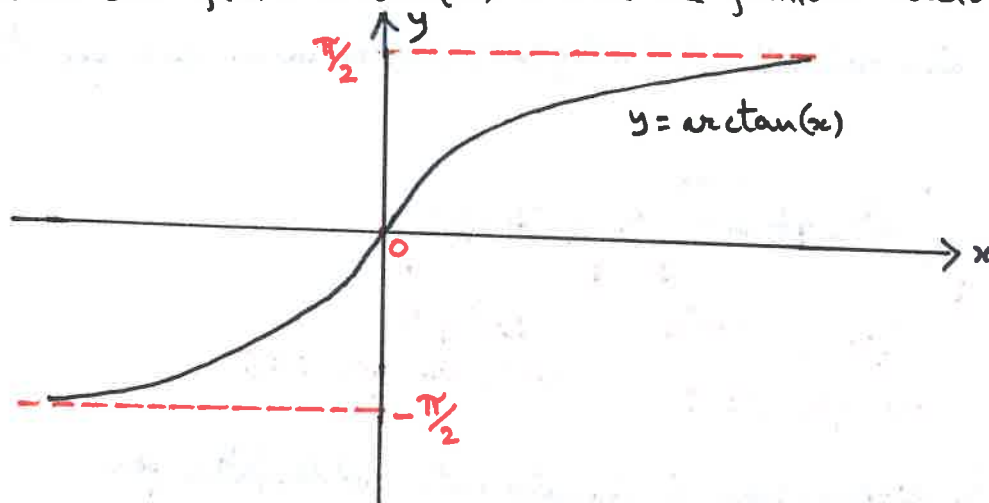
Quindi la soluzione complessiva della disequazione data è semplicemente

$$\boxed{0 < x < e}.$$

5) $\log_2 (\arctan(x) + 4) \geq \cos^2(x)$

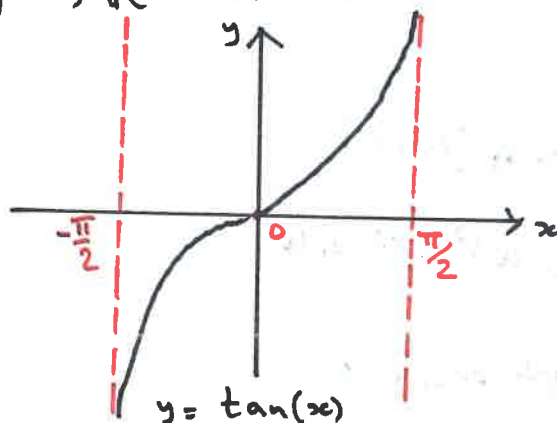
6

Sol. Si ricordi che $f(x) = \arctan(x)$ indica la funzione arcotangente



$\arctan: \mathbb{R} \rightarrow (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, cioè l'inversa della funzione tangente

$\tan: (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}$ ristretta all'intervallo $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$



La condizione di esistenza della disequazione data è quella imposta dalla presenza del logaritmo:

$$\arctan(x) + 4 > 0$$

Poiché $\arctan(x) > -\frac{\pi}{2} \forall x \in \mathbb{R}$, si ha in particolare

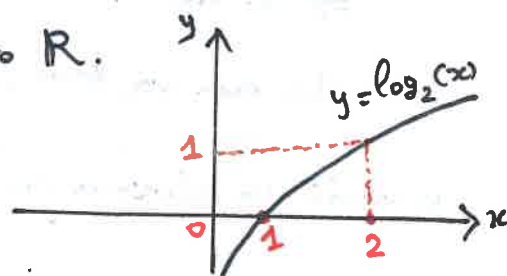
$$\arctan(x) + 4 > -\frac{\pi}{2} + 4 = \frac{1}{2}(8 - \pi) > 0$$

$\Rightarrow$ l'insieme di definizione della disequazione è tutto $\mathbb{R}$.

Inoltre, essendo la funzione $y = \log_2(x)$ (monotona) strettamente crescente, si ha $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$\log_2 (\arctan(x) + 4) > \log_2 (4 - \frac{\pi}{2}) > \log_2 (4 - 2) = \log_2 (2) = 1 \geq \cos^2(x)$$

$\Rightarrow$ la disequazione data è vera $\forall x \in \mathbb{R}$.



Per casa: risolvere la disequazione $|x-1| < |x+1|$.

7

Concludiamo questa prima parte con un esempio concreto di situazione che richiede la risoluzione di disequazioni:

6) Determinare l'insieme di definizione della funzione

$$f(x) = \frac{[\log(\sqrt{x} + \sqrt{1-x})]^{3/4}}{e^{\sin(x^2)}}$$

Sol. Le condizioni di esistenza che dobbiamo considerare sono

$$\left\{ \begin{array}{l} x \geq 0 \quad (\text{esistenza di } \sqrt{x}) \\ \sqrt{x} + \sqrt{1-x} > 0 \quad (\text{esistenza del logaritmo}) \\ \log(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) \geq 0 \quad (\text{esistenza di } (\dots)^{3/4} = \sqrt[4]{(\dots)^3}) \\ e^{\sin(x^2)} \neq 0 \quad (\text{esistenza della frazione}) \end{array} \right.$$

La condizione $e^{\sin(x^2)} \neq 0$ è vera $\forall x \in \mathbb{R}$, ed è immediato osservare che per ogni $x \geq 0$ si ha anche $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} > 0$ (entrambi gli addendi sono ≥ 0 e non sono contemporaneamente $= 0$);

in più, la condizione $\log(\sqrt{x} + \sqrt{1-x}) \geq 0$ si traduce in

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} \geq 1,$$

ossia equivalentemente

$$\sqrt{1-x} \geq 1 - \sqrt{x}.$$

Per $1 - \sqrt{x} < 0$, ossia per $x > 1$, la disequazione è vera, perché si ha

$$\underbrace{\sqrt{1-x}}_{\geq 0} \geq \underbrace{1-\sqrt{x}}_{< 0}.$$

Similmente, la disequazione è vera per $x = 1$ (in quanto diventa $0 \geq 0$).

Per $0 \leq x < 1$, entrambi i membri di

$$\sqrt{|1-x|} \geq 1 - \sqrt{x}$$

sono positivi, e possiamo elevare al quadrato:

$$|1-x| \geq 1 - 2\sqrt{x} + x$$

Poiché $|1-x| = 1-x$ per $0 \leq x < 1$, tale disequazione diventa semplicemente

$$1-x \geq 1 - 2\sqrt{x} + x,$$

ossia

$$2x - 2\sqrt{x} \leq 0$$

$$\underbrace{2\sqrt{x}}_{\geq 0} \underbrace{(\sqrt{x} - 1)}_{\leq 0 \text{ per } 0 \leq x \leq 1} \leq 0$$

$\Rightarrow$ la disequazione è vera anche $\forall x \in [0, 1)$.

Concludiamo che la disequazione

$$\sqrt{|1-x|} + \sqrt{x} \geq 1$$

è vera $\forall x \geq 0$, e che quindi l'insieme di definizione di f

è tutto l'intervallo $[0, +\infty)$.

PARTE II

19

TROVARE ESTREMO SUPERIORE / INFERIORE, MASSIMO / MINIMO DI
SOTTOINSIEMI DI $\mathbb{R}$

Dati i seguenti sottoinsiemi $S \subseteq \mathbb{R}$, trovarne estremo superiore e inferiore
e stabilire se si tratta di massimo e minimo.

1) $S = \left\{ \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

Sol. L'insieme dato è l'insieme

$$S = \left\{ 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots \right\}$$

È chiaro dunque che $\inf(S) = 0 = \min(S)$.

→ Poiché $0 = \inf(S) \in S$

Mostriamo ora che $\sup(S) = 1$: poiché $1 \notin S$, seguirà che
 $\nexists \max(S)$.

→ Perché $\nexists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$
t.c. $\frac{n-1}{n} = 1$, cioè
t.c. $n-1 = n$

Per dimostrare che $\sup(S) = 1$, ricordiamo
la definizione di estremo superiore:

Def. Dato un sottoinsieme $\emptyset \neq S \subseteq \mathbb{R}$ e $z \in \mathbb{R}$, si ha
 $z = \sup(S)$ se:

(1) z è un maggiorante di S : $\forall x \in S$, vale $x \leq z$

(2) z è il più piccolo dei
maggioranti di S : $\forall y \in \mathbb{R}, y \neq z$, t.c. $x \leq y \forall x \in S$,
si ha $z < y$

Nel nostro caso, quindi, per verificare che $\sup(S) = 1$ dobbiamo
mostrare due cose:

(1) che vale $\frac{n-1}{n} \leq 1 \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$: e questo è ovvio, poiché
 $n-1 \leq n \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

(2) che non si può avere $\frac{n-1}{n} \leq y \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ se $y < 1$:

per dimostrare questo, prendiamo un numero reale $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo da avere $y < 1 - \varepsilon$;

riusciamo a trovare un qualche $n \in \mathbb{N}$ t.c.

$$\frac{n-1}{n} > 1 - \varepsilon \quad ?$$

Sì, risolvendo quest'ultima disequazione in n :

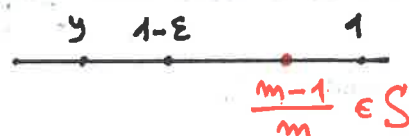
$$\frac{n-1}{n} > 1 - \varepsilon \Rightarrow n-1 > n - n \cdot \varepsilon$$

$$\Rightarrow n \cdot \varepsilon > 1$$

$$\Rightarrow n > \frac{1}{\varepsilon}$$

Cioè, abbiamo dimostrato che per $\varepsilon > 0$ fissato t.c. $y < 1 - \varepsilon$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ t.c. $n > \frac{1}{\varepsilon}$ si ha:

$$y < 1 - \varepsilon < \frac{n-1}{n} \in S$$



$\Rightarrow$ nessun $y < 1$ può essere un maggiorante di S .

Dunque $1 = \sup(S)$, e abbiamo finito.

Per casa: svolgere lo stesso esercizio con

$$S = \left\{ (-1)^n \cdot \frac{n-1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} = \left\{ 0, \frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}, \dots \right\}$$

(mostrare che $\inf(S) = -1$, $\sup(S) = 1$ e $\nexists \min(S)$, $\nexists \max(S)$).

$$2) \quad S = \{ \log(1+3x) : x \in \mathbb{R}, |x-2| \leq \sqrt{x} \}$$

Sol. Risolviamo innanzitutto la disequazione

$$|x-2| \leq \sqrt{x} \quad (\text{c.e.: } x \geq 0)$$

Entrambi i membri sono positivi, dunque possiamo elevare al quadrato:

$$x^2 - 4x + 4 \leq x$$

$$x^2 - 5x + 4 \leq 0$$

$$(x-4)(x-1) \leq 0$$



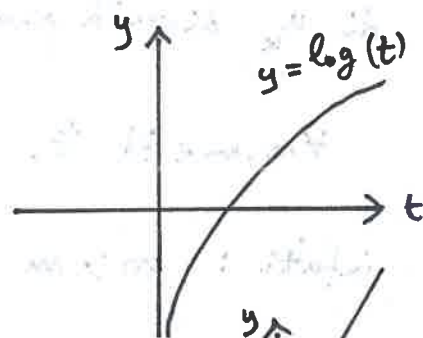
$\Rightarrow$ ha soluzione $1 \leq x \leq 4$.

Osserviamo che per tali valori si ha $1+3x > 0$

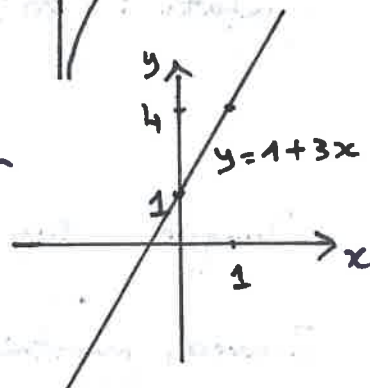
$\Rightarrow$ la funzione $f(x) = \log(1+3x)$ è definita nell'intervallo $[1, 4]$.

Notiamo poi che:

a) la funzione $y = \log(t)$ è (monotona) strettamente crescente per $t > 0$



b) la funzione $g(x) = 1+3x$ è a sua volta strettamente crescente (è una retta con coefficiente angolare > 0)



$\Rightarrow$ anche la funzione composta

$$f(x) = \log(g(x)) = \log(1+3x)$$

è strettamente crescente in $[1, 4]$

$$\Rightarrow \underline{\inf(S)} = \log(1+3 \cdot 1) = \log(4) = \underline{\min(S)}$$

$$\text{e } \underline{\sup(S)} = \log(1+3 \cdot 4) = \log(13) = \underline{\max(S)}.$$

3) $S = \left\{ x \in \mathbb{R} : x > 0 \text{ e } \cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \right\}$.

Sol. Ricordiamo che $\cos(t) = 0 \iff t = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Dunque

$$\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \iff \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} + k\pi = \frac{\pi + 2k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff x = \frac{2}{\pi + 2k\pi} = \frac{2}{\pi(1+2k)}, k \in \mathbb{Z}$$

Osserviamo poi che se $k < 0$ si ha $x = \frac{2}{\pi(1+2k)} < 0$

$$\Rightarrow S = \left\{ \frac{2}{\pi(1+2k)} : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Chiamiamo $\frac{2}{\pi(1+2k)} := a_k$, e osserviamo che più il denominatore

di a_k diventa grande, più a_k diventa piccolo, ossia:

$$\forall n, m \in \mathbb{N} \text{ t.c. } n > m, \text{ si ha } a_n < a_m$$

$$(\text{infatti: } n > m \Rightarrow \frac{\pi}{2}(1+2n) > \frac{\pi}{2}(1+2m)$$

$$\Rightarrow \frac{2}{\pi(1+2n)} < \frac{2}{\pi(1+2m)}, \text{ cioè } a_n < a_m)$$

$$\text{Dunque } \underline{\sup(S) = \max(S) = a_0 = \frac{2}{\pi}}.$$

Invece, mostriamo che $\inf(S) = 0$ ($0 \notin S \Rightarrow \nexists \min(S)$).

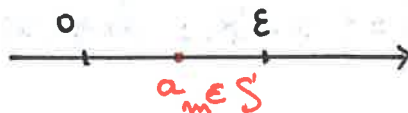
→ Dobbiamo cioè mostrare che

(1) $0 < x \forall x \in S$: e questo lo sappiamo già dalla definizione di S .

(2) nessun $\varepsilon > 0$ può essere un minorante di S .

Sia dunque $\varepsilon > 0$ fissato: vogliamo mostrare che

$\exists m \in \mathbb{N}$ t.c. $a_m < \varepsilon$, ossia



che la disuguaglianza

$$\frac{2}{\pi(1+2m)} < \varepsilon$$

ha soluzione in m :

$$\frac{2}{\pi(1+2m)} < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{\pi(1+2m)}{2} > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\Rightarrow 1+2m > \frac{2}{\pi\varepsilon}$$

$$\Rightarrow m > \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\pi\varepsilon} - 1 \right),$$

cioè basta prendere un numero naturale m t.c.

$$m > \frac{1}{\pi\varepsilon} - \frac{1}{2} \quad \left(\text{e un tale } m \text{ esiste, perché } \mathbb{N} \subseteq \mathbb{R} \text{ è illimitato} \right)$$

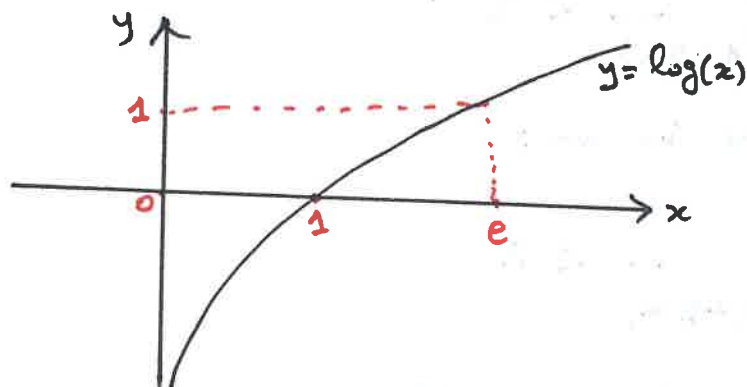
per avere $0 < a_m < \varepsilon$.

Per casa: svolgere lo stesso esercizio per l'insieme

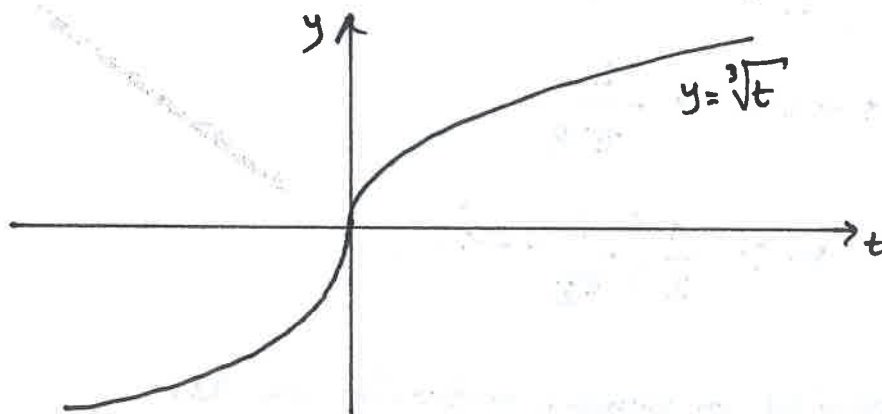
$$S = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 2\} : \frac{2x+1}{x-2} - \frac{5}{2(x+2)} < \frac{1}{2} \right\}.$$

$$4) S = \left\{ x \in \mathbb{R} : \log(x) \geq \sqrt[3]{\sin(x)} \right\} \cap [e, +\infty)$$

Sol. Si osservi che $\forall x \in [e, +\infty)$ si ha $\log(x) \geq 1$



Poiché inoltre $\forall x \in \mathbb{R}$ si ha $\sin(x) \leq 1 \Rightarrow \sqrt[3]{\sin(x)} \leq \sqrt[3]{1} = 1$



segue che $\forall x \in [e, +\infty)$

$$\log(x) \geq 1 \geq \sqrt[3]{\sin(x)}$$

Perciò $S = [e, +\infty)$, da cui otteniamo che $\underline{\inf(S) = e = \min(S)}$
 e $\underline{\sup(S) = +\infty} \Rightarrow \nexists \max(S)$.

Per casa: svolgere lo stesso esercizio per l'insieme

$$S = \left\{ a \in \mathbb{R} : \log(x^2 - 2ax + a) \text{ è definita su tutto } \mathbb{R} \right\}$$